第4回
日本組合せゲーム理論研究集会

開会挨拶

（国立情報学研究所　末續鴻輝）

• 本研究集会について

→組合せゲーム理論の研究発表を行う研究集会

　背景知識はチュートリアルセッションで共有することにより、各人の発表は本質的な議論を中心に行うことができる。

　毎年夏に開催しており、今年は4回目＆初のオンライン開催

　およそ30名のご参加いただき深く感謝します。

- 昨今の動向

多様な国際研究集会→コロナでどうなる？

国内の需要→競技プログラミングで認知度上昇？

第4回日本組合せゲーム理論研究集会
チュートリアルセッション
～正規形非不偏ゲーム～

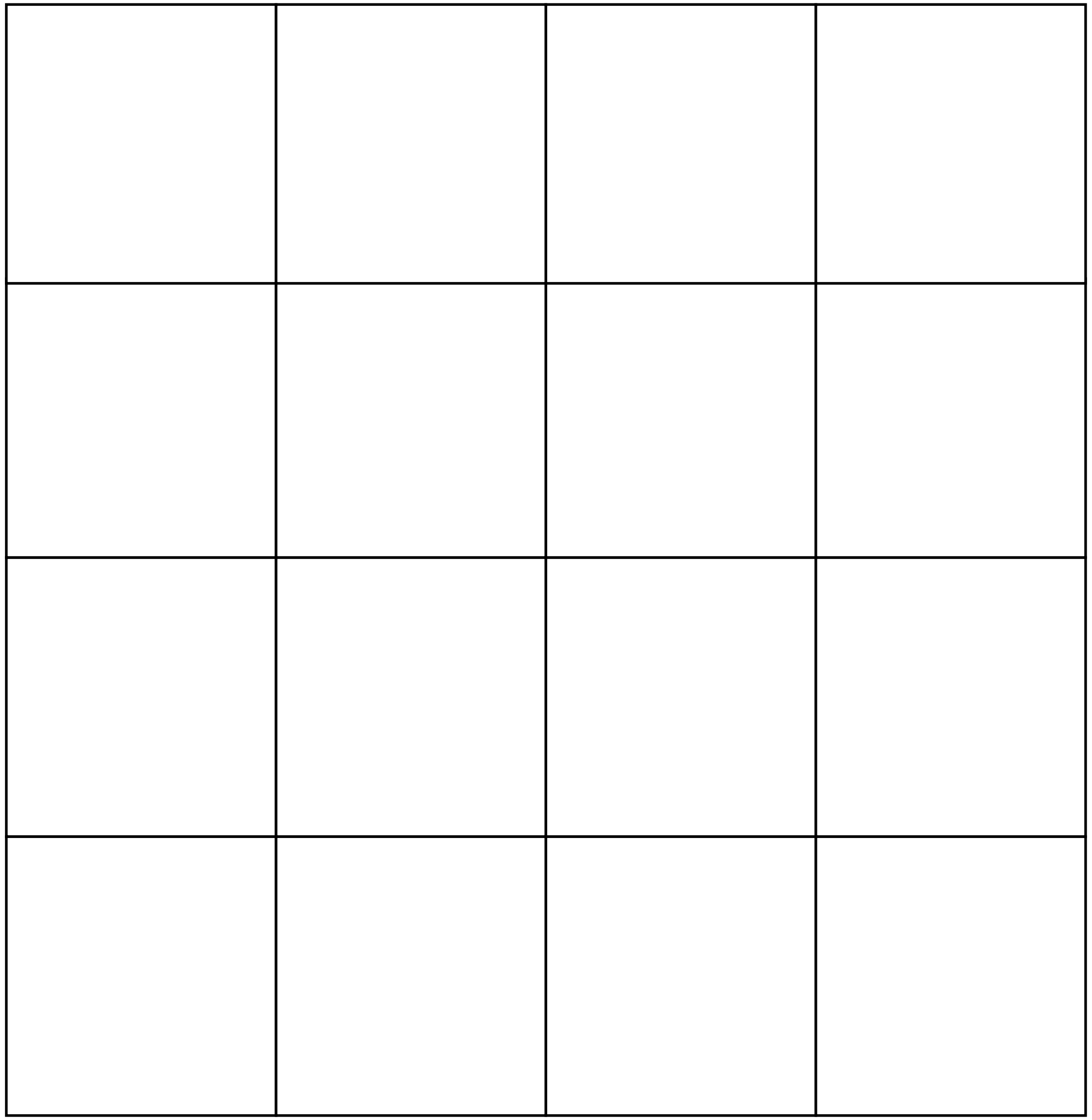
国立情報学研究所　特任研究員

末續鴻輝

正規形の非不偏ゲーム

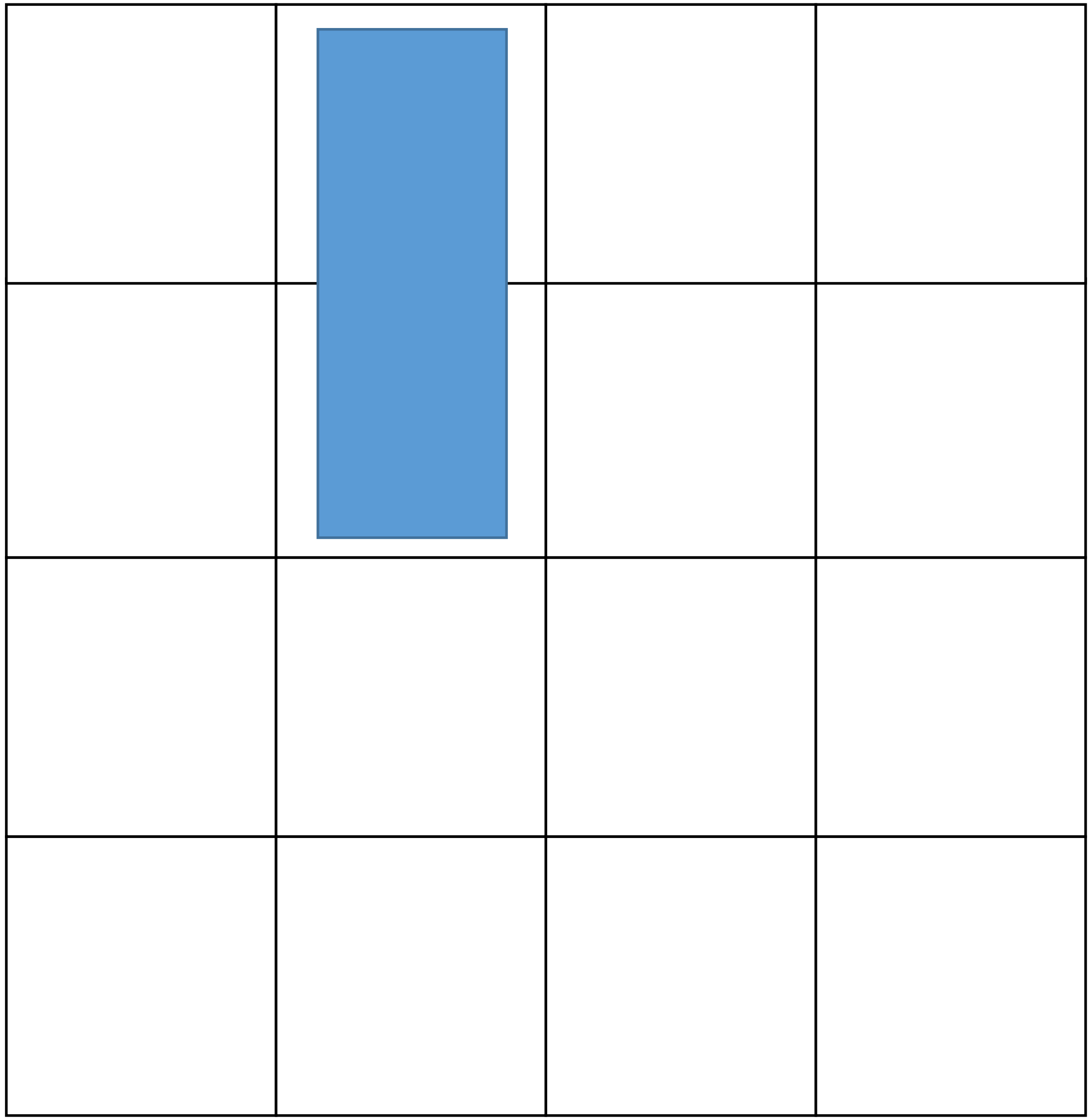
ドミナリング

- 片方のプレイヤ（左と呼ぶ）はドミノを横に置く
- もう片方のプレイヤ（右と呼ぶ）はドミノを縦に置く
- 置けなくなった方の負け



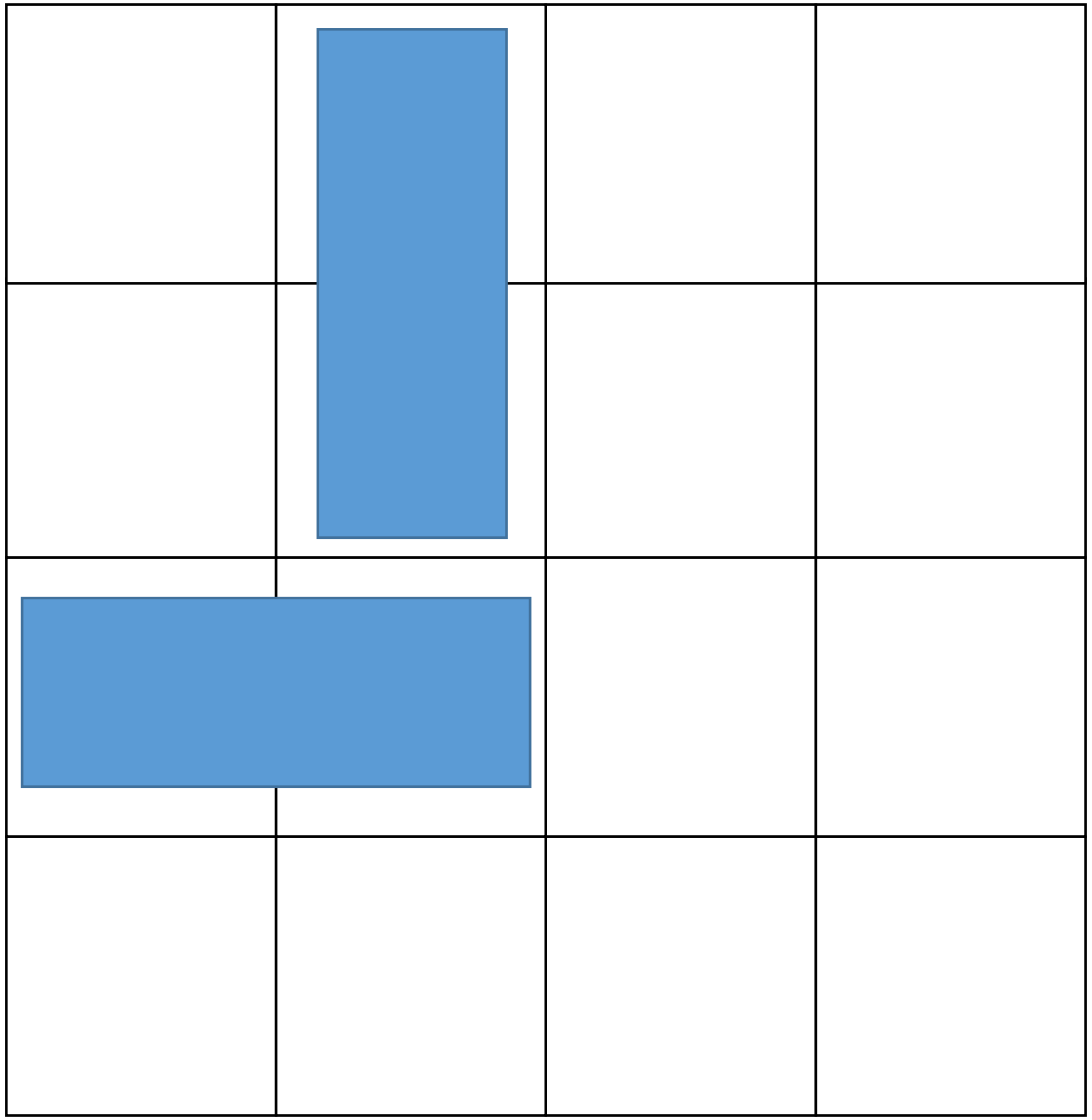
ドミナリング

- 片方のプレイヤ（左と呼ぶ）はドミノを横に置く
- もう片方のプレイヤ（右と呼ぶ）はドミノを縦に置く
- 置けなくなった方の負け



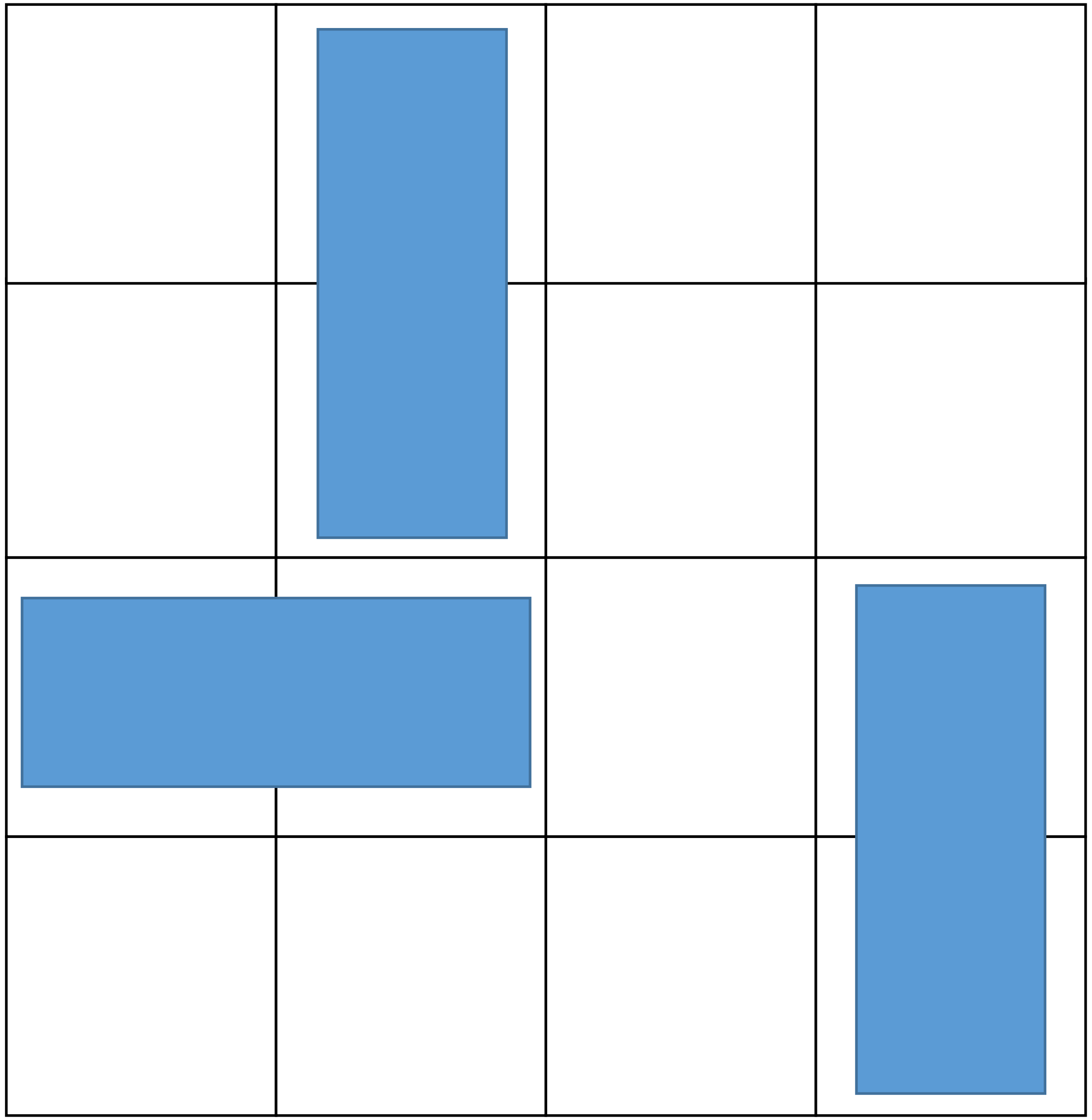
ドミナリング

- 片方のプレイヤ（左と呼ぶ）はドミノを横に置く
- もう片方のプレイヤ（右と呼ぶ）はドミノを縦に置く
- 置けなくなった方の負け



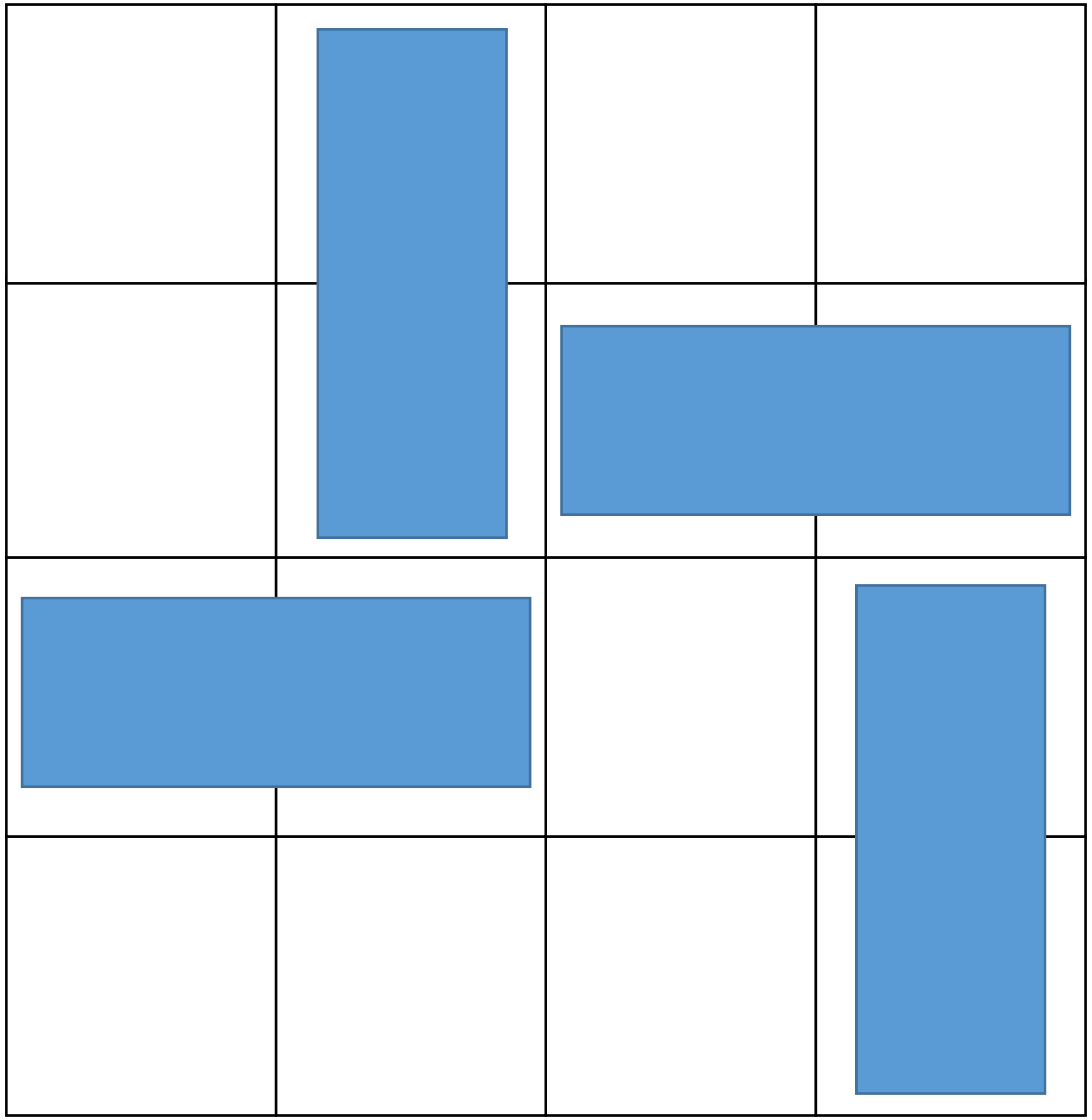
ドミナリング

- 片方のプレイヤ（左と呼ぶ）はドミノを横に置く
- もう片方のプレイヤ（右と呼ぶ）はドミノを縦に置く
- 置けなくなった方の負け



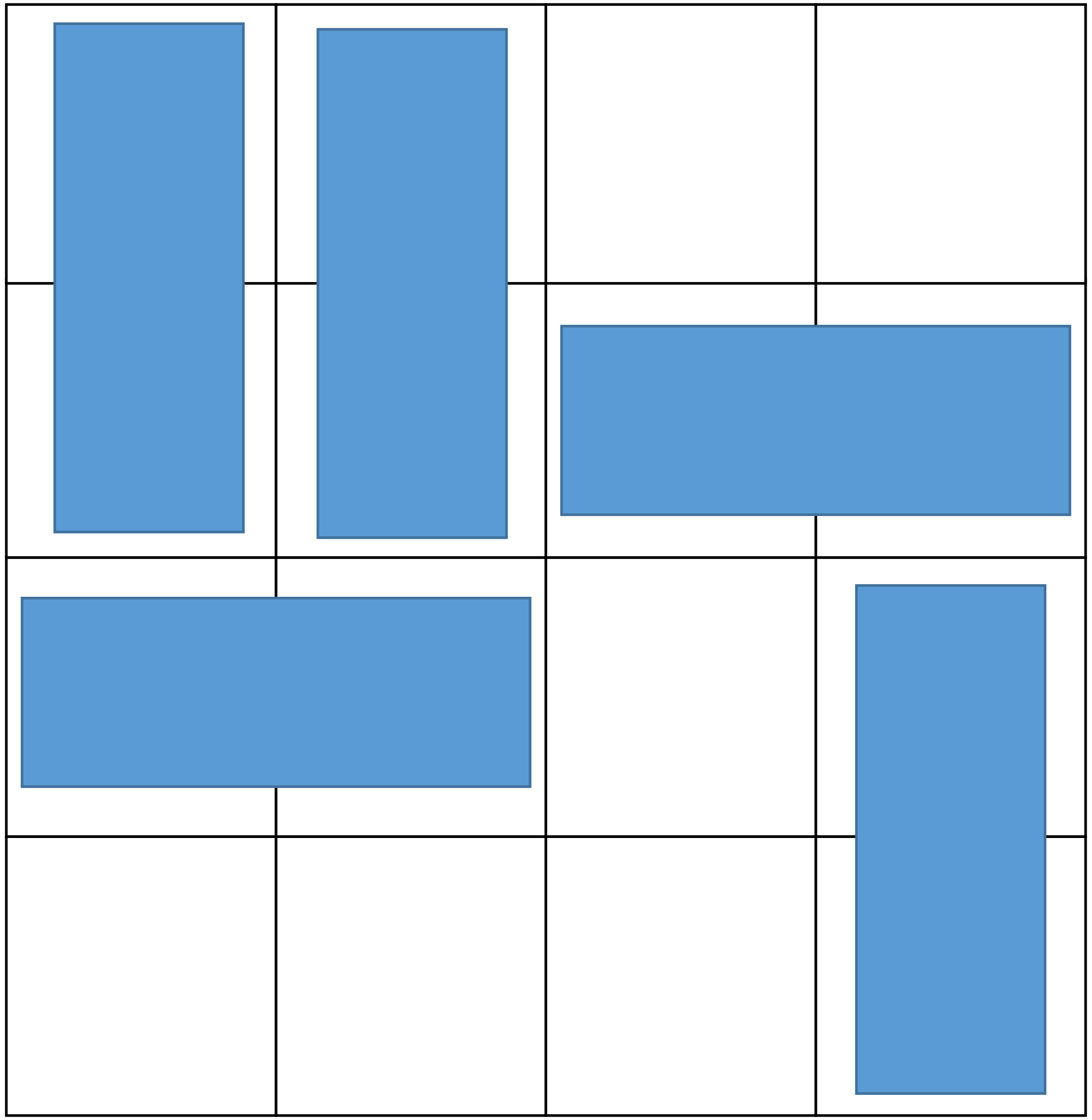
ドミナリング

- 片方のプレイヤ（左と呼ぶ）はドミノを横に置く
- もう片方のプレイヤ（右と呼ぶ）はドミノを縦に置く
- 置けなくなった方の負け



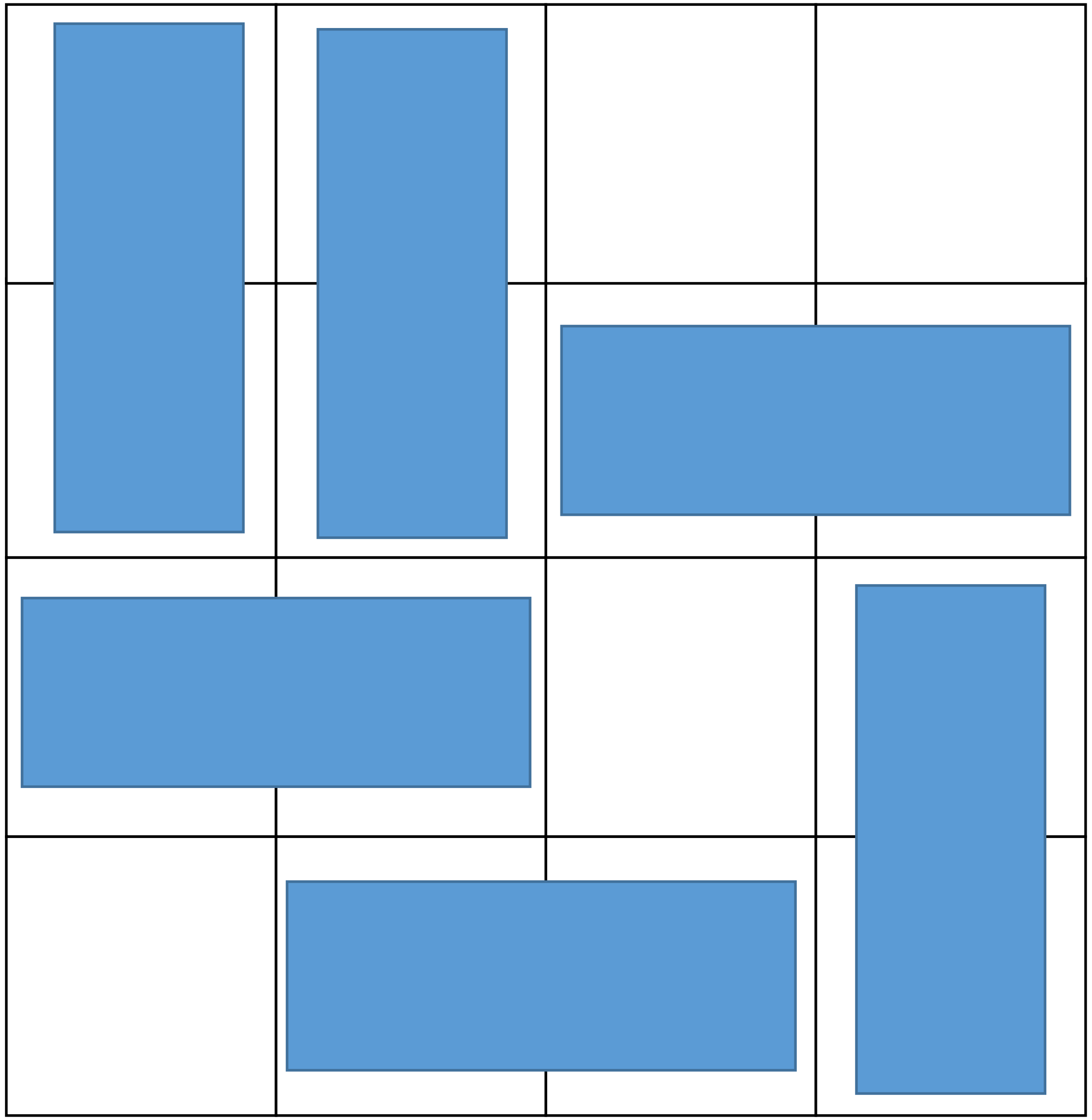
ドミナリング

- 片方のプレイヤ（左と呼ぶ）はドミノを横に置く
- もう片方のプレイヤ（右と呼ぶ）はドミノを縦に置く
- 置けなくなった方の負け



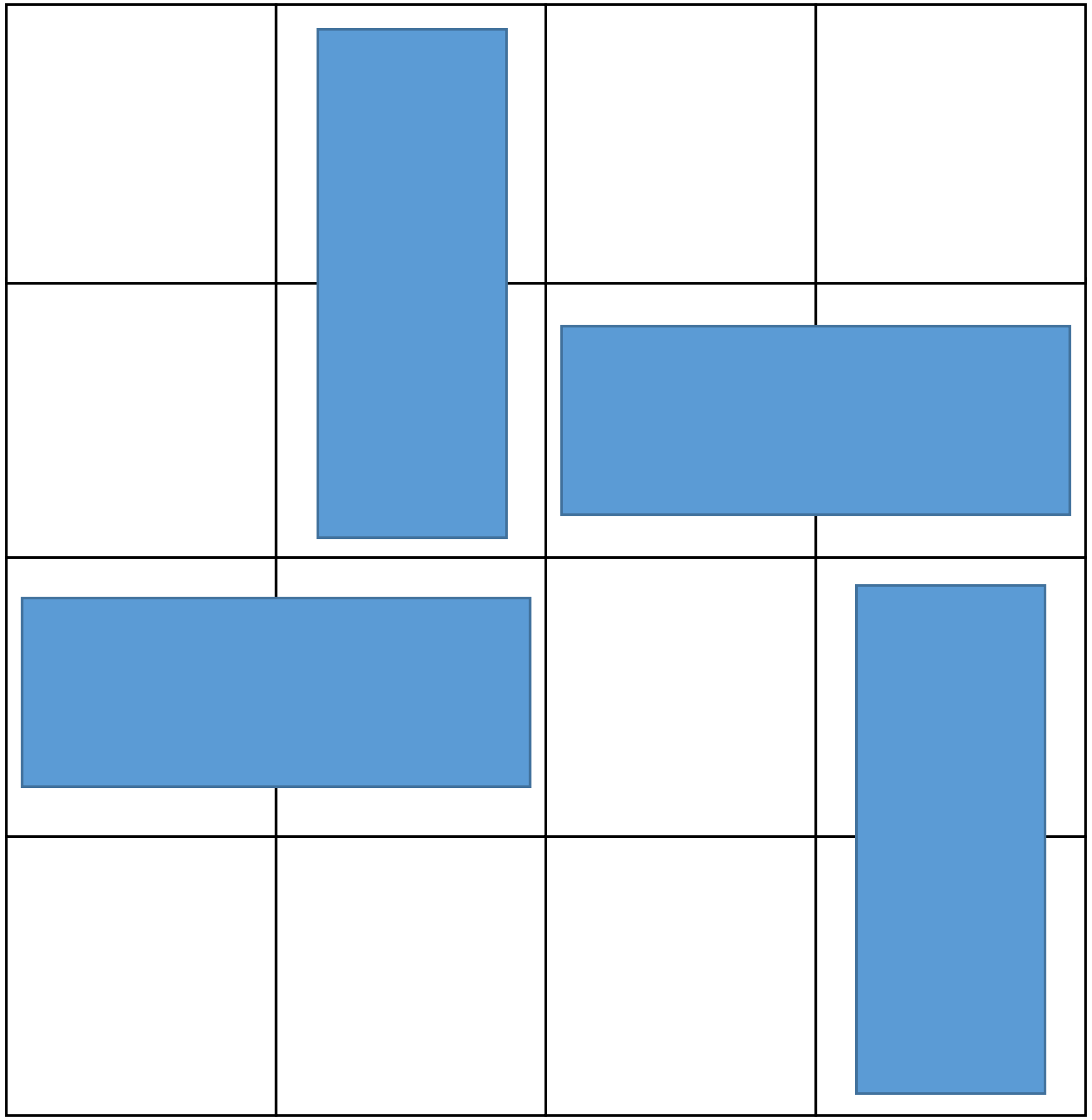
ドミナリング

- 片方のプレイヤ（左と呼ぶ）はドミノを横に置く
- もう片方のプレイヤ（右と呼ぶ）はドミノを縦に置く
- 置けなくなった方の負け



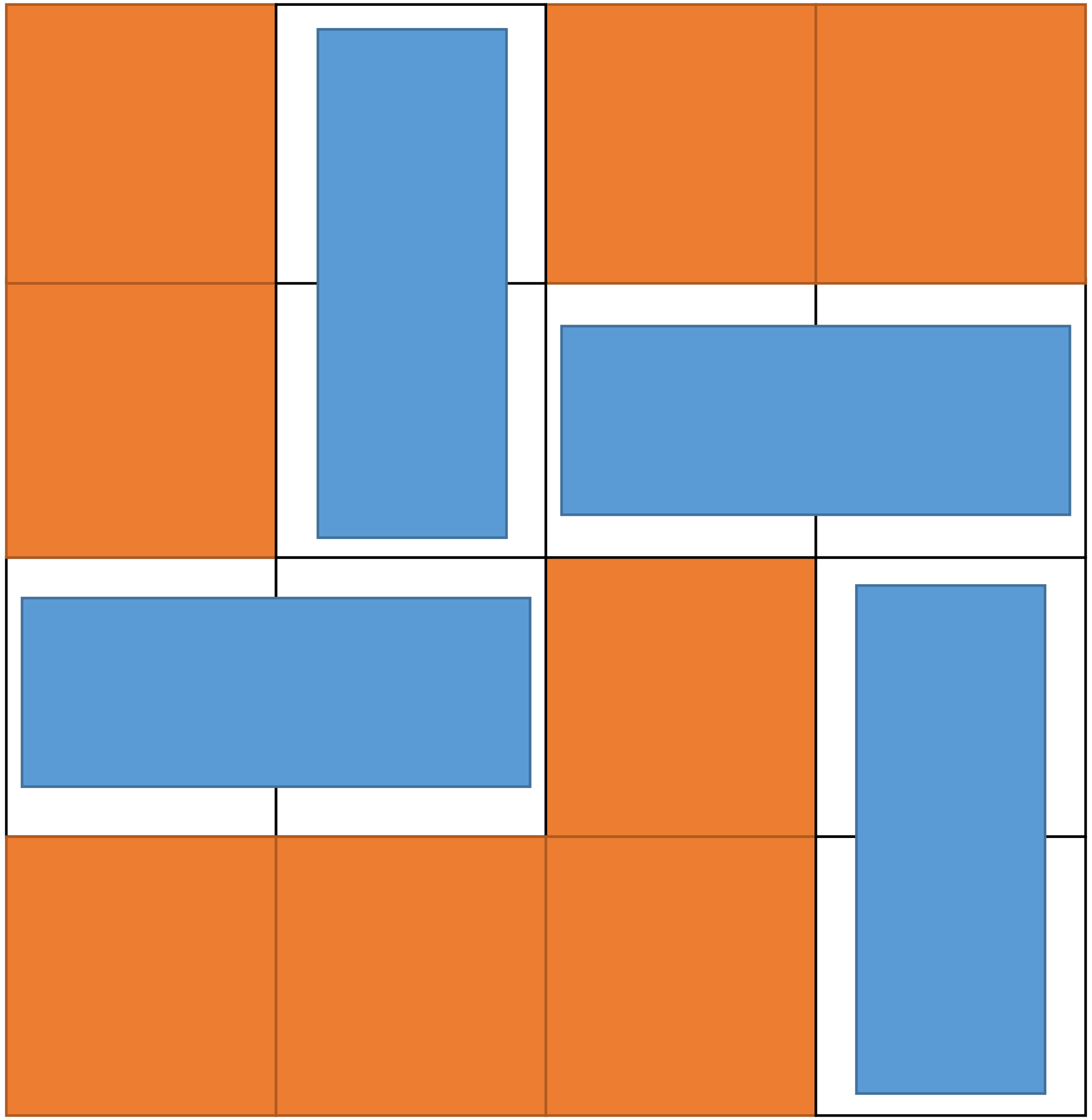
ドミナリング

- 片方のプレイヤ（左と呼ぶ）はドミノを横に置く
- もう片方のプレイヤ（右と呼ぶ）はドミノを縦に置く
- 置けなくなった方の負け



ドミナリング

- それぞれの場所が、完全に独立している。
「ゲームの和」



ゲームの再帰的定義

- ゲームを再帰的に定義する。

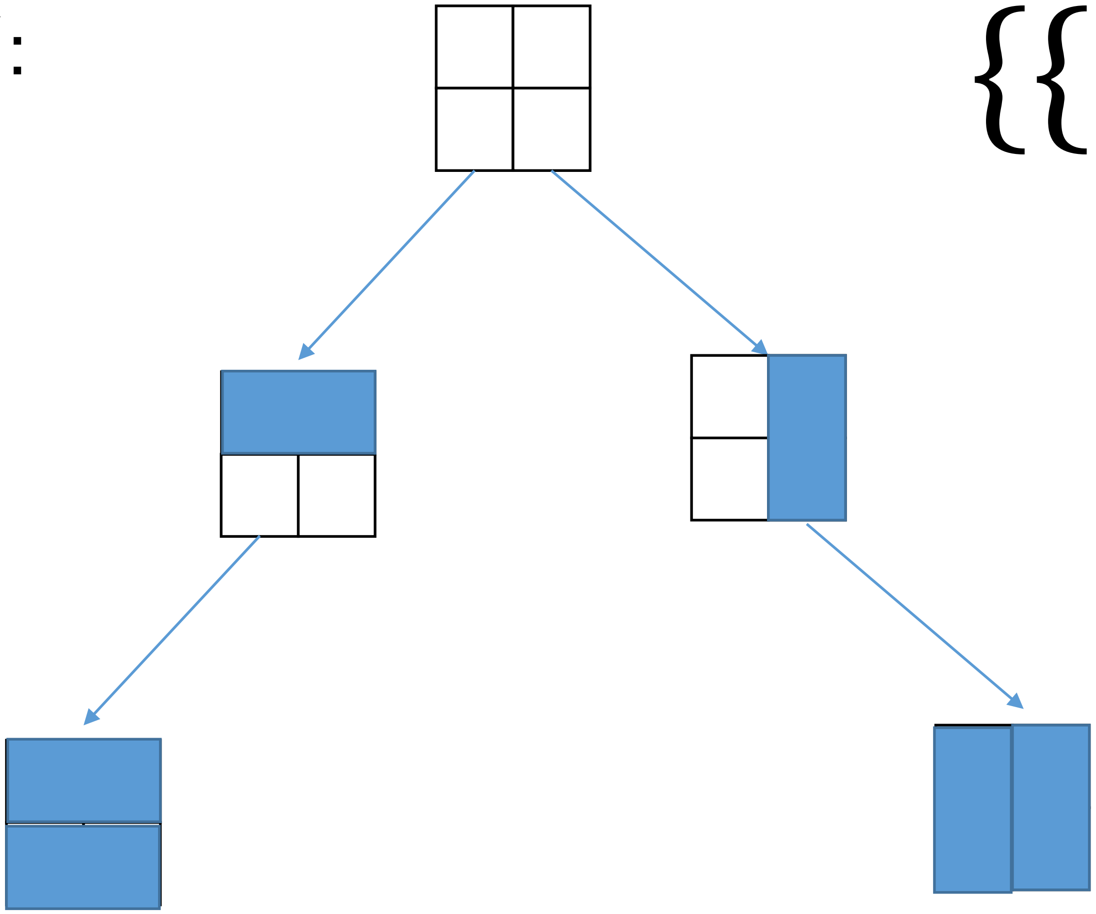
- {|}はゲームである。これを0と呼ぶ。
- $G_{L_1}, G_{L_2}, \dots, G_{L_n}, G_{R_1}, G_{R_2}, \dots, G_{R_m}$がゲームであるとき、$\{G_{L_1}, G_{L_2}, \dots, G_{L_n} | G_{R_1}, G_{R_2}, \dots, G_{R_m}\}$はゲームである。
- $G_{L_1}, G_{L_2}, \dots, G_{L_n}$を左選択肢、$G_{R_1}, G_{R_2}, \dots, G_{R_m}$を右選択肢と呼ぶ。

(プレイヤの名前を、左、右とすることと対応)

- |の左右は何もなくともよい。
- →つまり{|}とか{{|} |}とか{{{|}|}|{|{|}}}みたいなものがゲーム

ゲームの再帰的定義

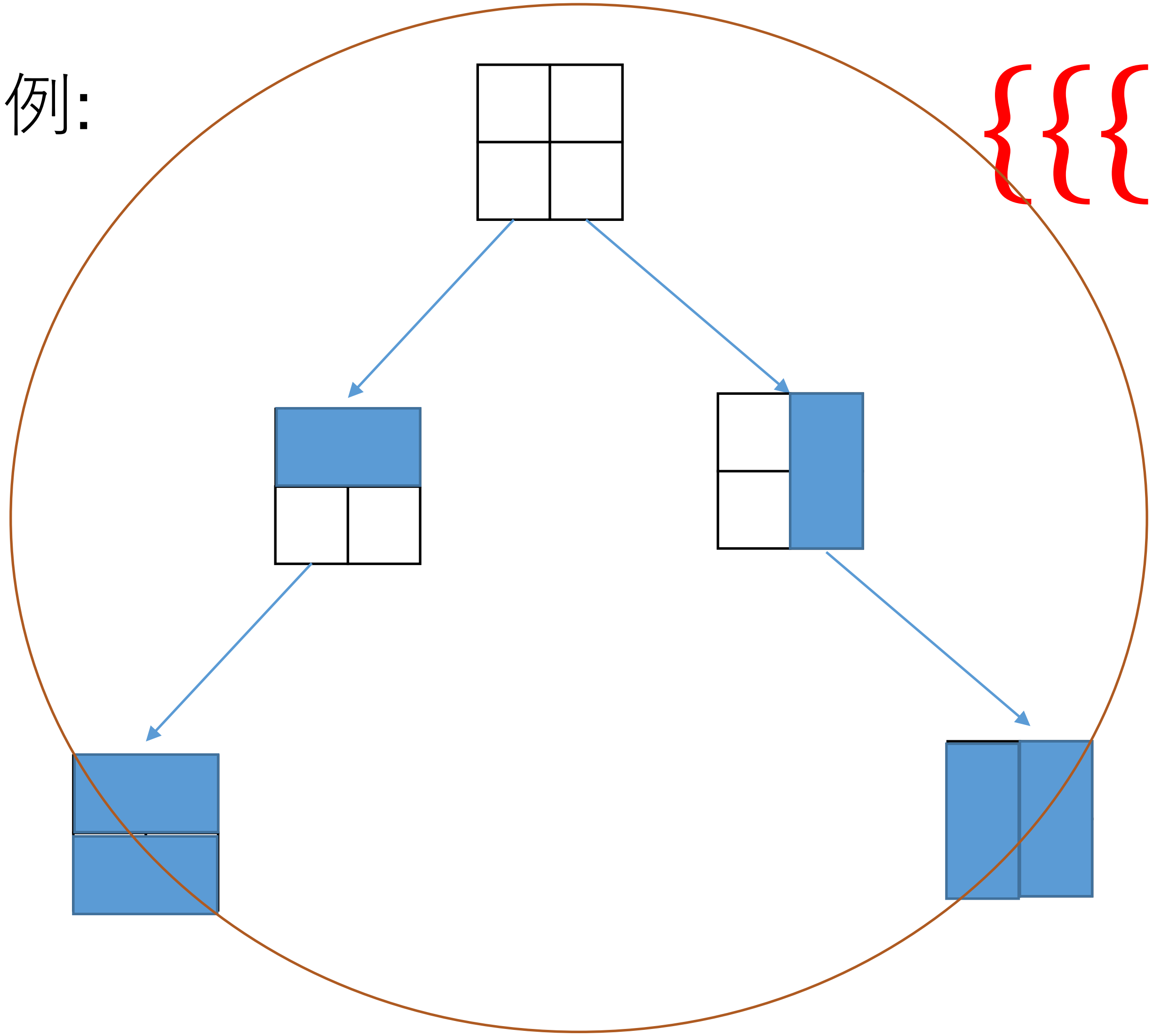
- 例:



{{{|}|}|{|{|}}}

ゲームの再帰的定義

- 例:

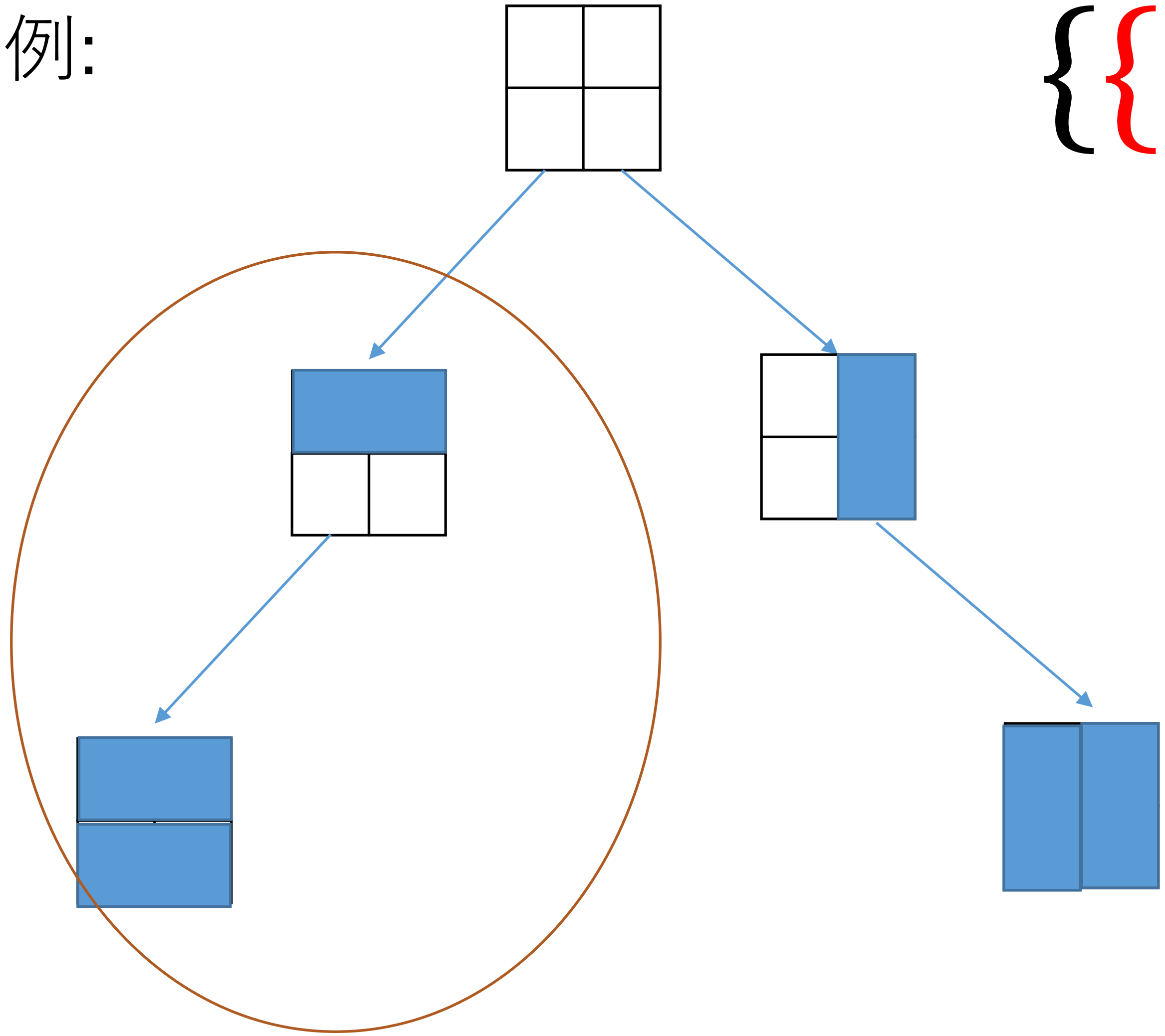


{{{|}|}|{|{|}}}

ゲームの再帰的定義

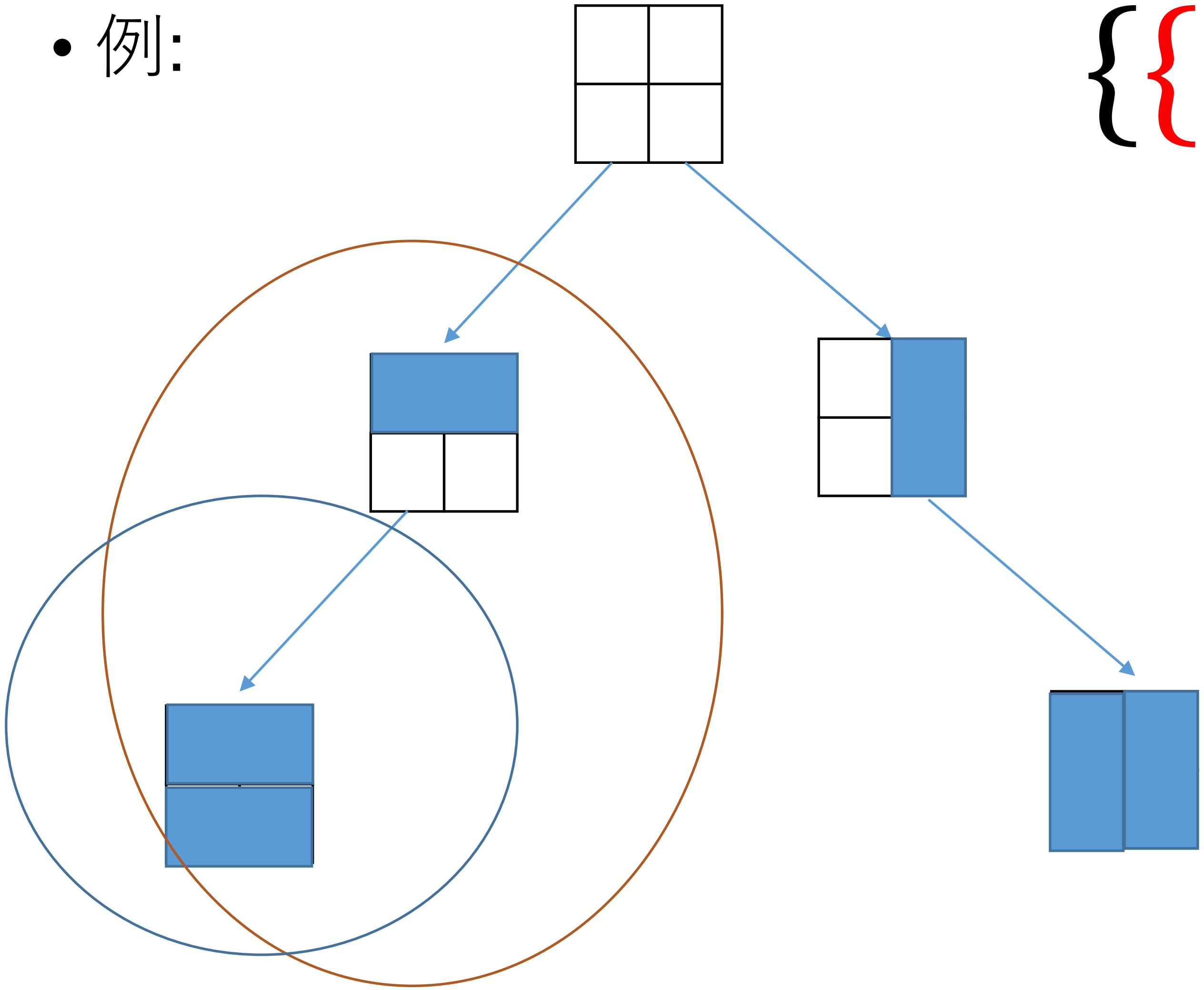
- 例:

{{{|}|}|{|{|}}}



ゲームの再帰的定義

- 例:

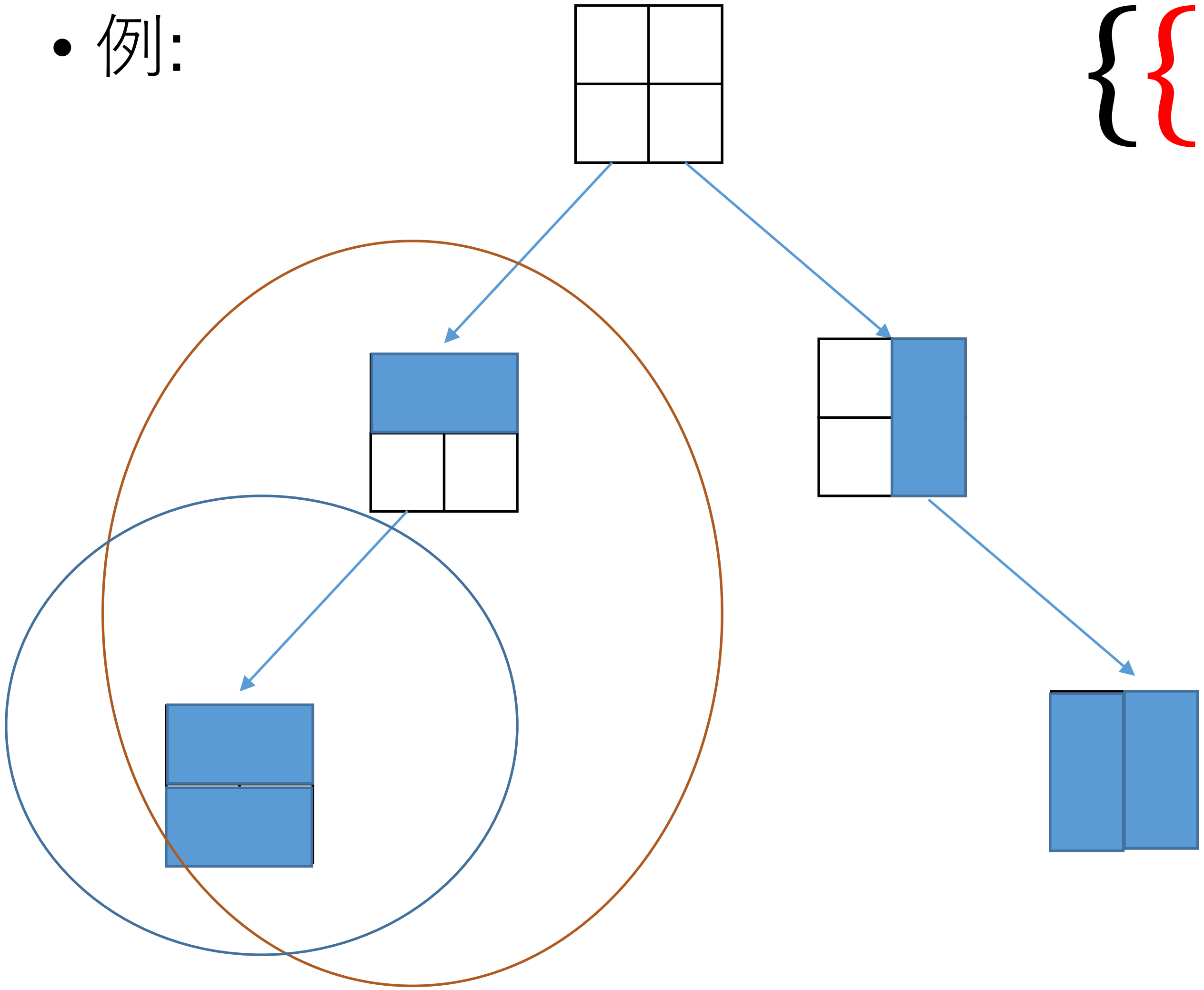


{{{|}|}|{|{|}}}

ゲームの再帰的定義

- 例:

{{{|}|}|{|{|}}}



ここではドミナリングを例に出したが、他のゲームでも同じ木構造なら同じ形で書けることに注意！
→ゲームの抽象化

ゲームの帰結類 $\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{N}$ の再帰的定義

- 偶然や運の要素がなく、引き分けもないものを扱うため、局面と手番を与えると必勝戦略を持つプレイヤが一意に定まる。
- 局面は4つに分類できる
  - $\mathcal{P}$：どちらのプレイヤが先手であるかに関わらず、後手に必勝戦略がある局面全体の集合
  - $\mathcal{R}$：先手であっても後手であっても、プレイヤ右に必勝戦略がある局面全体の集合
  - $\mathcal{L}$：先手であっても後手であっても、プレイヤ左に必勝戦略がある局面全体の集合
  - $\mathcal{N}$：どちらのプレイヤが先手であるかに関わらず、先手に必勝戦略がある局面全体の集合

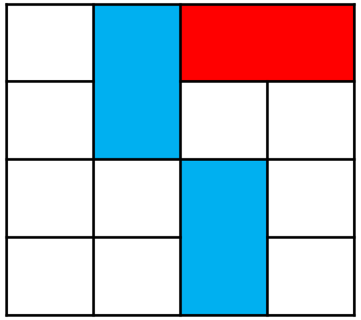
ちゃんと書くとこうなる

- $G = \{G_{L_1}, G_{L_2}, \dots, G_{L_n} | G_{R_1}, G_{R_2}, \dots, G_{R_m}\}$について、
- $\forall i \in \{1, \dots, n\}$について$G_{L_i} \in \mathcal{N} \cup \mathcal{R}$かつ、$\forall j \in \{1, \dots, m\}$について$G_{R_j} \in \mathcal{N} \cup \mathcal{L}$ならば、$G \in \mathcal{P}$
- $\forall i \in \{1, \dots, n\}$について$G_{L_i} \in \mathcal{N} \cup \mathcal{R}$かつ、$\exists j \in \{1, \dots, m\}$について$G_{R_j} \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$ならば、$G \in \mathcal{R}$
- $\exists i \in \{1, \dots, n\}$について$G_{L_i} \in P \cup \mathcal{L}$かつ、$\forall j \in \{1, \dots, m\}$について$G_{R_j} \in \mathcal{N} \cup \mathcal{L}$ならば、$G \in \mathcal{L}$
- $\exists i \in \{1, \dots, n\}$について$G_{L_i} \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$かつ、$\exists j \in \{1, \dots, m\}$について$G_{R_j} \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$ならば、$G \in \mathcal{N}$

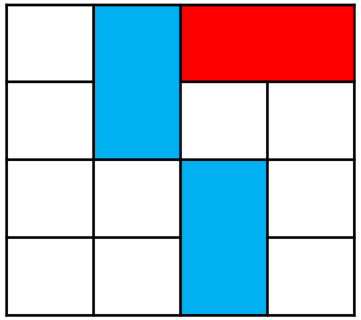
ゲームの帰結類

	任意の左選択肢Gが$G \in R \cup N$	ある左選択肢がGが$G \in L \cup P$
任意の右選択肢$\boldsymbol{G}$が$\boldsymbol{G \in L \cup N}$	$\boldsymbol{\mathcal{P}}$	$\boldsymbol{\mathcal{L}}$
ある右選択肢$\boldsymbol{G}$が$\boldsymbol{G \in R \cup P}$	$\boldsymbol{\mathcal{R}}$	$\boldsymbol{\mathcal{N}}$

ゲームの和



ゲームの和



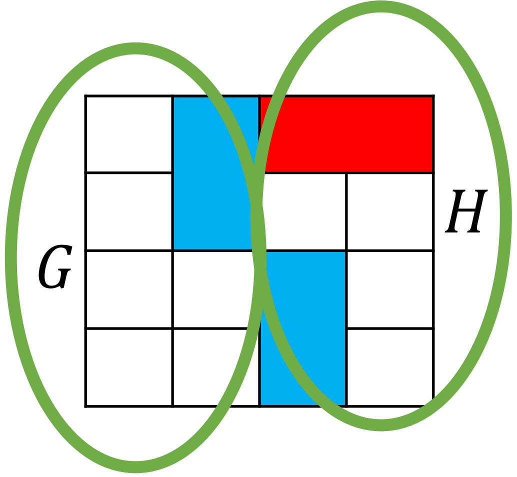
$$G:\{G_{L_1}, G_{L_2}, \ldots, G_{L_n} | G_{R_1}, G_{R_2}, \ldots, G_{R_m}\},$$
$$H:\{H_{L_1}, H_{L_2}, \ldots, H_{L_{n'}} | H_{R_1}, H_{R_2}, \ldots, H_{R_{m'}}\}$$

に対し、 $G + H$ 　を

$$\{G_{L_1} + H, G_{L_2} + H, \ldots, G_{L_n} + H, G + H_{L_1}, G + H_{L_2}, \ldots, G + H_{L_{n'}},$$
$$| G_{R_1} + H, G_{R_2} + H, \ldots, G_{R_m} + H, G + H_{R_1}, G + H_{R_2}, \ldots, G + H_{R_{m'}}\}$$

と定義する。

ゲームの和



$G + H$

$$G: \{G_{L_1}, G_{L_2}, \dots, G_{L_n} | G_{R_1}, G_{R_2}, \dots, G_{R_m}\},$$
$$H: \{H_{L_1}, H_{L_2}, \dots, H_{L_{n'}} | H_{R_1}, H_{R_2}, \dots, H_{R_{m'}}\}$$

に対し、 $G + H$ を

$$\{G_{L_1} + H, G_{L_2} + H, \dots, G_{L_n} + H, G + H_{L_1}, G + H_{L_2}, \dots, G + H_{L_{n'}},$$
$$| G_{R_1} + H, G_{R_2} + H, \dots, G_{R_m} + H, G + H_{R_1}, G + H_{R_2}, \dots, G + H_{R_{m'}}\}$$

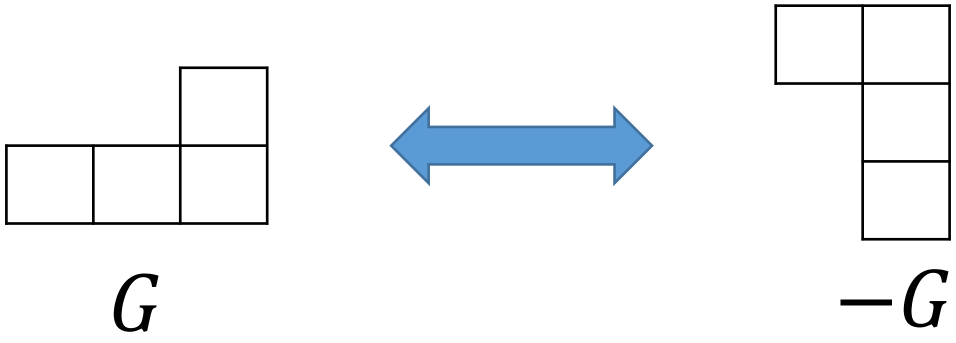
と定義する。

定理

- 任意のゲームGについて、$G+0=G$
- 任意のゲームG,Hについて、$G+H=H+G$
- 任意のゲームG,H,Jについて、$(G+H)+J=G+(H+J)$

ゲームの符号

- $G=\{G_{L_1},G_{L_2},\dots,G_{L_n}\middle|G_{R_1},G_{R_2},\dots,G_{R_m}\}$に対して、
$-G=\{-G_{R_1},-G_{R_2},\dots,-G_{R_m}\middle|-G_{L_1},-G_{L_2},\dots,-G_{L_n}\}$と再帰的に定義する。
- $-G$はゲームGの二人のプレイヤの役割を入れ替えた局面になる。
- $G+(-H)$を$G-H$と書くこととする。



定理

- $-(-G) = G$
- $-(G + H) = -G - H$

ゲームの等号

- ゲームGとゲームHについて、$G = H$とは、任意のゲームJに対して、$G + J$と$H + J$の帰結類が等しいことであると定義する。

(これまでより緩めた等号の定義)

定理

- $G = 0 \leftrightarrow G \in \mathcal{P}$
- $G - G = 0$
- $G - H = 0 \leftrightarrow G = H$

ゲームの半順序

- 任意のゲームXに対して、ゲームG, Hが、$H + X \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$ならば$G + X \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$および、 $H + X \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}$ならば$G + X \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}$という関係を満たしている(言い方を変えれば、 $H + X$において左が勝つときはつねに$G + X$において左が勝つ)とき、$G \geq H$であると定義する。 $\leq$ も同様。

- 注：半順序は成り立つが全順序は成り立たない、すなわち「比較不能」となることもある。比較不能を表す記号として$||$を用いる。

定理

- $G \geq 0 \leftrightarrow G \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$
- $G + J \geq H + J \leftrightarrow G \geq H$
- $G \geq H \leftrightarrow G - H \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$

ゲームの半順序

$$G > 0 \leftrightarrow G \in \mathcal{L} \qquad G > H \leftrightarrow G - H \in \mathcal{L}$$

$$G = 0 \leftrightarrow G \in \mathcal{P} \qquad G = H \leftrightarrow G - H \in \mathcal{P}$$

$$G < 0 \leftrightarrow G \in \mathcal{R} \qquad G < H \leftrightarrow G - H \in \mathcal{R}$$

$$G \parallel 0 \leftrightarrow G \in \mathcal{N} \qquad G \parallel H \leftrightarrow G - H \in \mathcal{N}$$

ゲームの標準形

- 等しいゲームの中に、ただ一つの標準形が存在する。

- $A = B$を満たすゲームA, Bに対し、**劣位な選択肢の削除**と**打ち消し可能な選択肢の短絡**を、それぞれ可能な限り行って得られるゲームをA', B'とすると、$A' \simeq B'$が成り立つ($\simeq$ はゲーム木が完全に一致の意)。

ゲームの標準形

- 定理:劣位な選択肢の削除

- $\mathrm{G} = \{A, B, C, \ldots | H, I, J, \ldots\}$において、$B \geq A$ならば、
- $\mathrm{G‘} = \{B, C, \ldots | H, I, J, \ldots\}$に対して、$\mathrm{G} = \mathrm{G’}$となる。

- (Aは左にとって選ぶメリットのない選択肢)

ゲームの標準形

$$\mathrm{G} = \{A, B, C, \ldots | H, I, J, \ldots\}$$

$$A \quad \leq \quad \mathrm{B}$$

ゲームの標準形

$$G = \{\cancel{A}, B, C, \dots | H, I, J, \dots\}$$

$$\cancel{A} \quad \leq \quad B$$

ゲームの標準形

- 定理:打ち消し可能な選択肢の短絡

- $G = \{A, B, C, \ldots | H, I, J, \ldots\}$について、$A$のある右選択肢$A^{\mathrm{R}}$が

$G \geq A^{\mathrm{R}}$を満たすとする。

- $A^{\mathrm{R}} = \{W, X, Y, \ldots | \ldots\}$とすると$G$において$A$を$A^{\mathrm{R}}$の左選択肢で置き換えたゲーム$G' = \{W, X, Y, \ldots, B, C, \ldots | H, I, J, \ldots\}$について、

$G = G'$が成り立つ。

- (右にとってGがA^{R}に置き換わっていることは悪くない
- 左がAとしてきたら右はすぐA^{R}に変える着手を選べる)

ゲームの標準形

$$\mathrm{G} = \{A, B, C, \dots | H, I, J, \dots\}$$

$$A$$

$$A^R = \{W, X, Y, \dots | \dots\}$$

ゲームの標準形

$$G = \{\cancel{A}, B, C, \dots \mid H, I, J, \dots\}$$

$$\cancel{A}$$

$$A^R = \{W, X, Y, \dots \mid \dots\}$$

ゲームの標準形

$$\mathrm{G} = \{\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \dots, B, C, \dots | H, I, J, \dots\}$$

$\cancel{A}$

$$A^R = \{W, X, Y, \dots | \dots\}$$

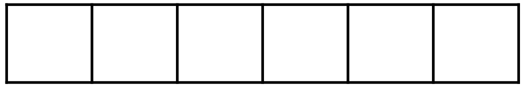
ゲームの標準形

- 等しいゲームの中に、ただ一つの標準形が存在する。

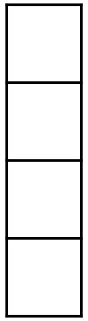
- $A = B$を満たすゲームA, Bに対し、**劣位な選択肢の削除**と**打ち消し可能な選択肢の短絡**を、それぞれ可能な限り行って得られるゲームをA', B'とすると、$A' \simeq B'$が成り立つ。

ゲームの値(整数)

- $0 = \{|\}$
- $n = \{n-1|\}$
- $-n = \{|-n+1\}$

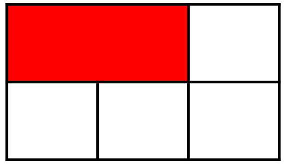


3



-2

ゲームの値(2進有理数)



$\frac{1}{2}$

- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- 定理:ゲームA, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝数としてちゃんと扱える！）。

ゲームの値(数,標準形への変形)

- 定理:ゲームGの任意の左選択肢G^{L}および任意の右選択肢G^{R}が数であって、$G^{\mathrm{L}} < G^{\mathrm{R}}$が成り立つならば$G$は数となる。具体的には、$G$はすべての$G^{\mathrm{L}}, G^{\mathrm{R}}$に対して$G^{\mathrm{L}} < x < G^{\mathrm{R}}$を満たす最も簡単な数$x$に等しい。

- 定義(最も簡単な数):数$x^{\mathrm{L}} < x^{\mathrm{R}}$に対して、$x^{\mathrm{L}}$と$x^{\mathrm{R}}$の間の最も簡単な数$x$は、以下のように定義する。
- $x^{\mathrm{L}} < n < x^{\mathrm{R}}$を満たす整数$n$が存在するときは、そのような数のなかで最も絶対値の小さい数。
- そうでないときは、xはx^{L}とx^{R}の間にある$\frac{i}{2^j}$の形の数のなかで、jが最小となる数。

特徴的ないくつかの値

- $* = \{0|0\}$
- $*2 = \{0, * | 0, *\}, \ldots, *n = \{0, *, \ldots, *(n-1) | 0, *, \ldots, *(n-1)\}$

- $\uparrow = \{0 | *\}$
- $\downarrow = \{* | 0\}$

特徴的ないくつかの値

- $* k || 0$,任意の正の数xに対して$-x <* k < x$,$* k +* k = 0$
- $* k$は石がk個ある一山のニムの局面と同値

- 任意の正の整数n, 任意の正の数xに対して$0 < n \cdot \uparrow < x$
- ただし、$n \cdot \uparrow = \uparrow + \uparrow + \ldots + \uparrow$($n$個の和)

- $(\uparrow + *) || 0$
- $\uparrow + *$ は $\uparrow *$と表記される

特徴的ないくつかの値

- タイニーとマイニー

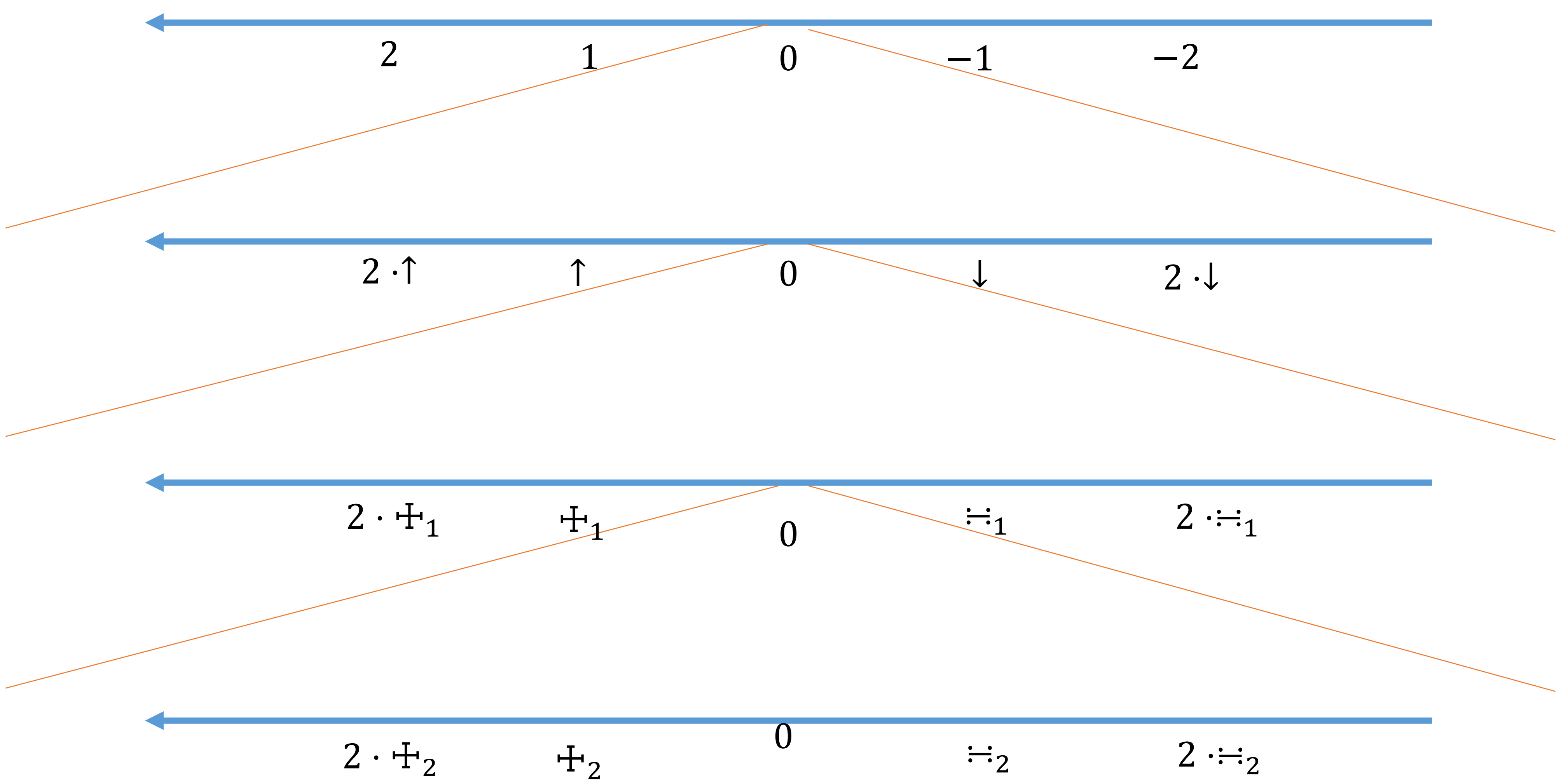
- $⧾_G = \{0|\{0|-G\}\}$
- $⧿_G = \{\{G|0\}|0\}$

- ただし、ある正の数xが存在して、$G > x$

特徴的ないくつかの値

- 任意のタイニー$⧾_G$, 任意の正整数nに対して、$0 < n・⧾_G <↑$

- 任意の数$x, y (x > y > 0)$, 任意の正整数nに対して、
- $0 < n・⧾_x < ⧾_y$

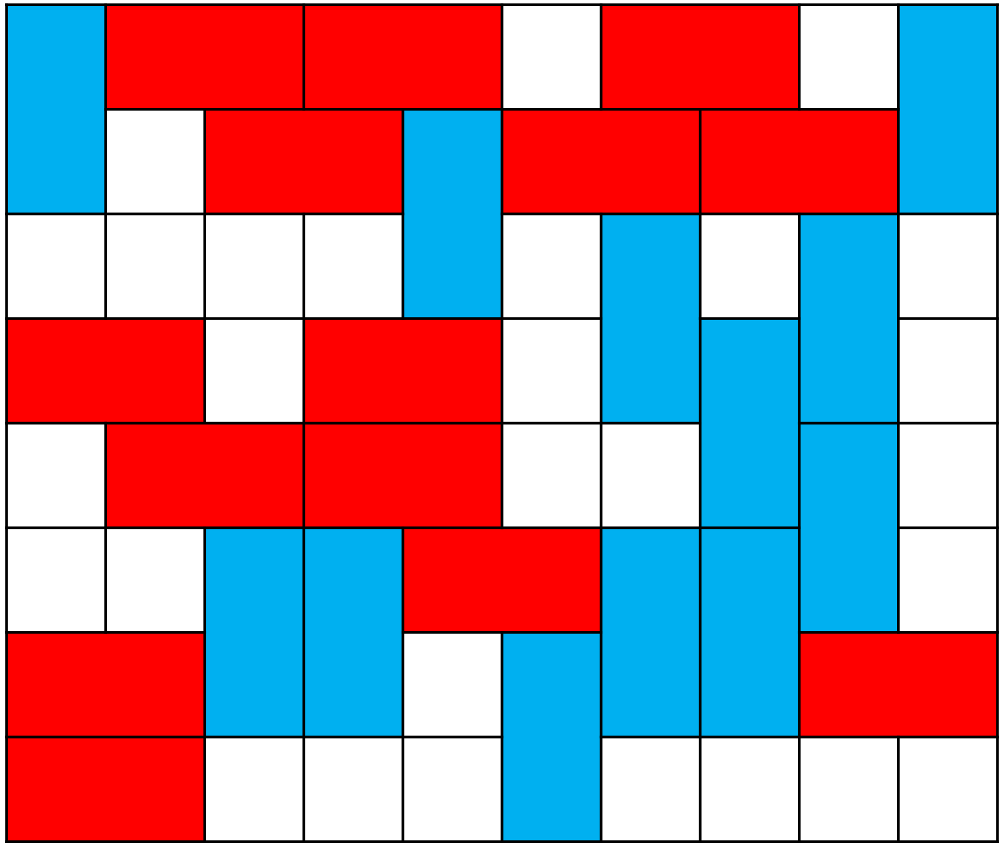


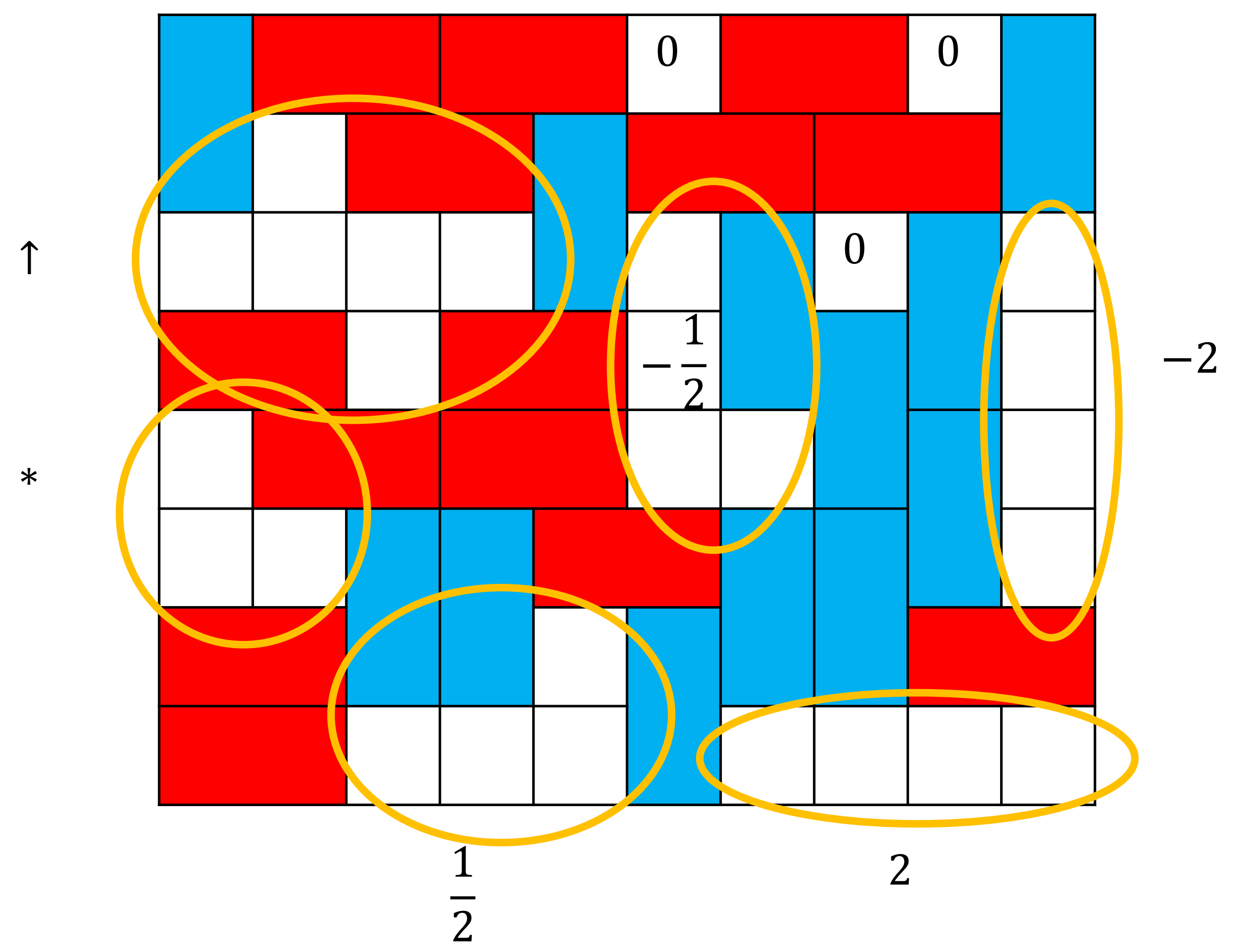
2
1
0
-1
-2
$2\cdot\uparrow$
$\uparrow$
0
$\downarrow$
$2\cdot\downarrow$
$2\cdot ⫩_1$
$⫩_1$
0
$∺_1$
$2\cdot ∺_1$
$2\cdot ⫩_2$
$⫩_2$
0
$∺_2$
$2\cdot ∺_2$

特徴的ないくつかの値

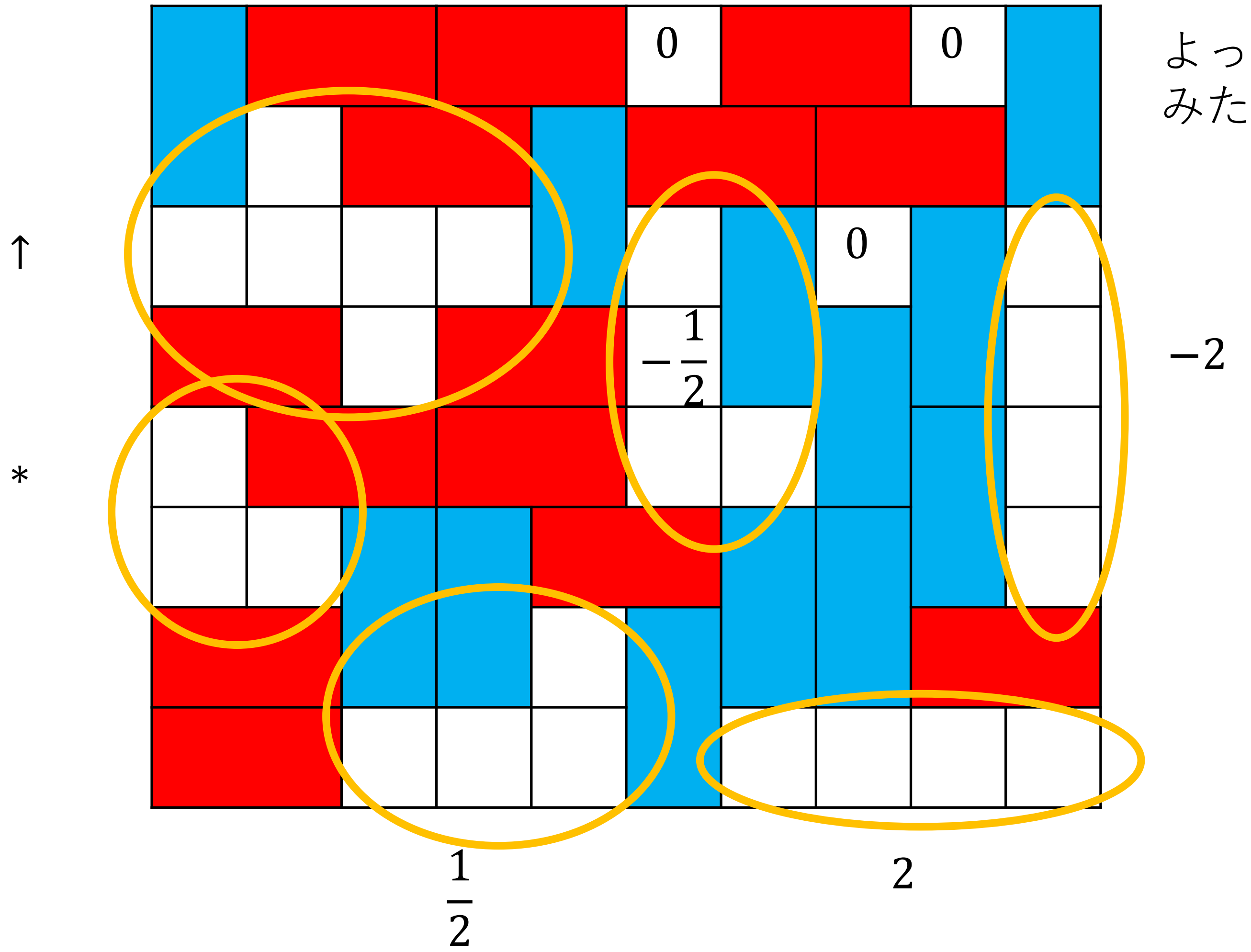
- 転換ゲーム
- 数$y > z$に対して$\{y|z\}$

- $\pm 1 = \{1|-1\}, \{5|3\}, \{7|-2\}$など。




0
0
0
↑
$-\frac{1}{2}$
-2
*
$\frac{1}{2}$
2

$$0+0+0+\uparrow+* - \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} + 2 = \uparrow *$$



よって先手が勝てる！
みたいな計算ができる

ここまでの参考文献

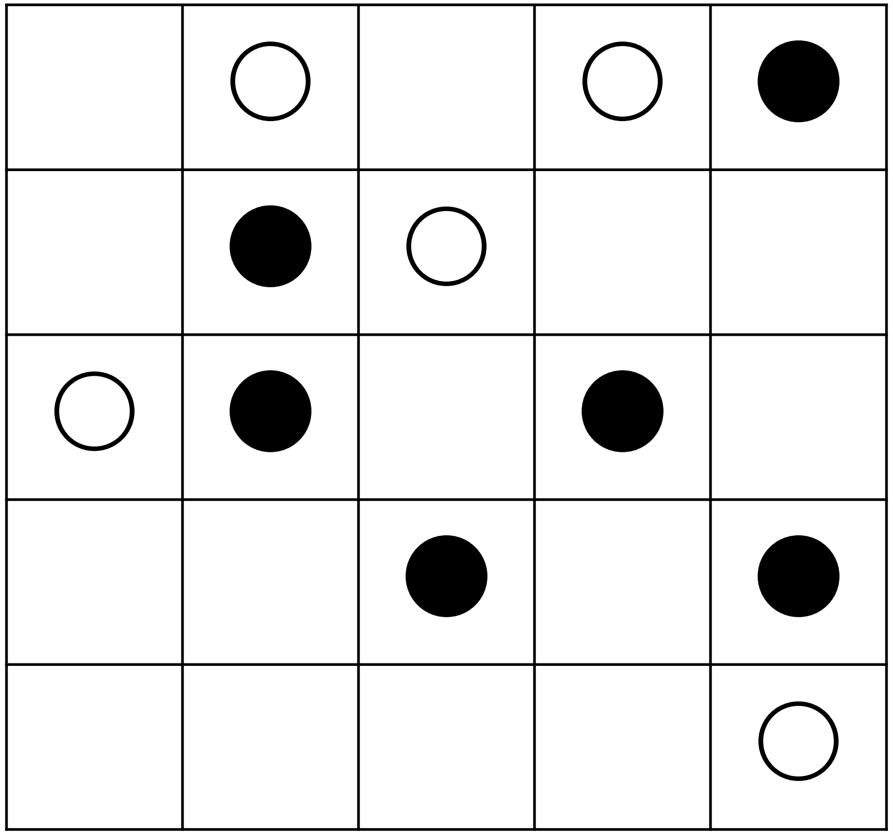
- Michael H Albert, Richard J. Nowakowski, David Wolfe著、川辺治之訳、“組合せゲーム理論入門　勝利の方程式(原題:Lessons in play : an introduction to combinatorial game theory)、共立出版、2011
- Aaron N. Siegel著、“Combinatorial Game Theory”、American Mathematical Society、2013

余談

任意のゲームの値が登場する
ようなルールは存在するか？

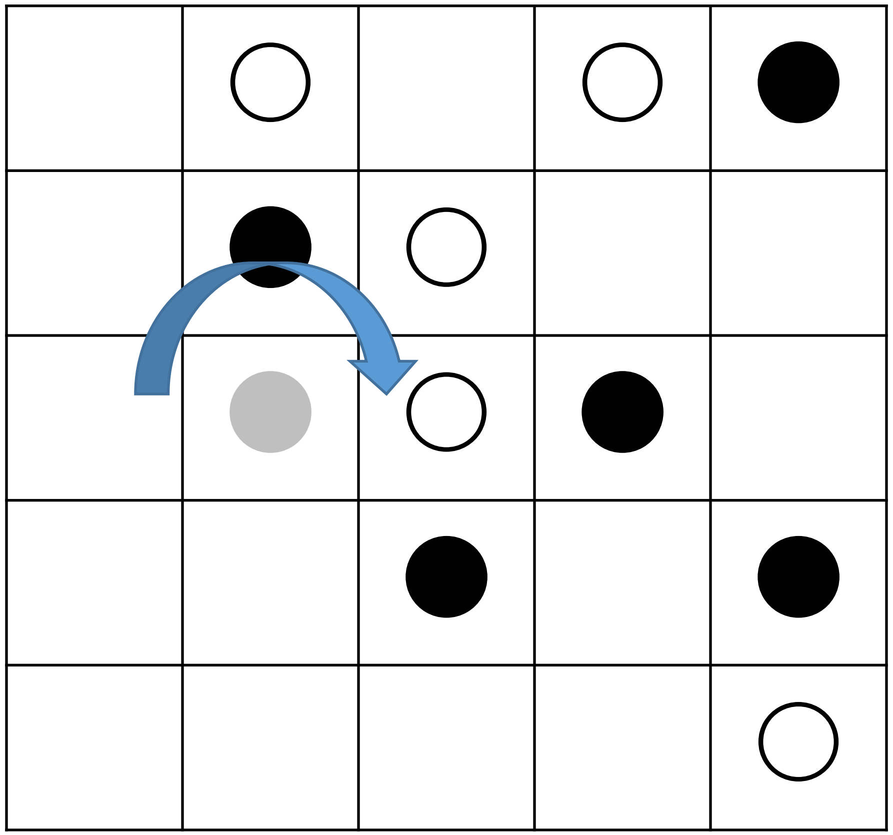
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



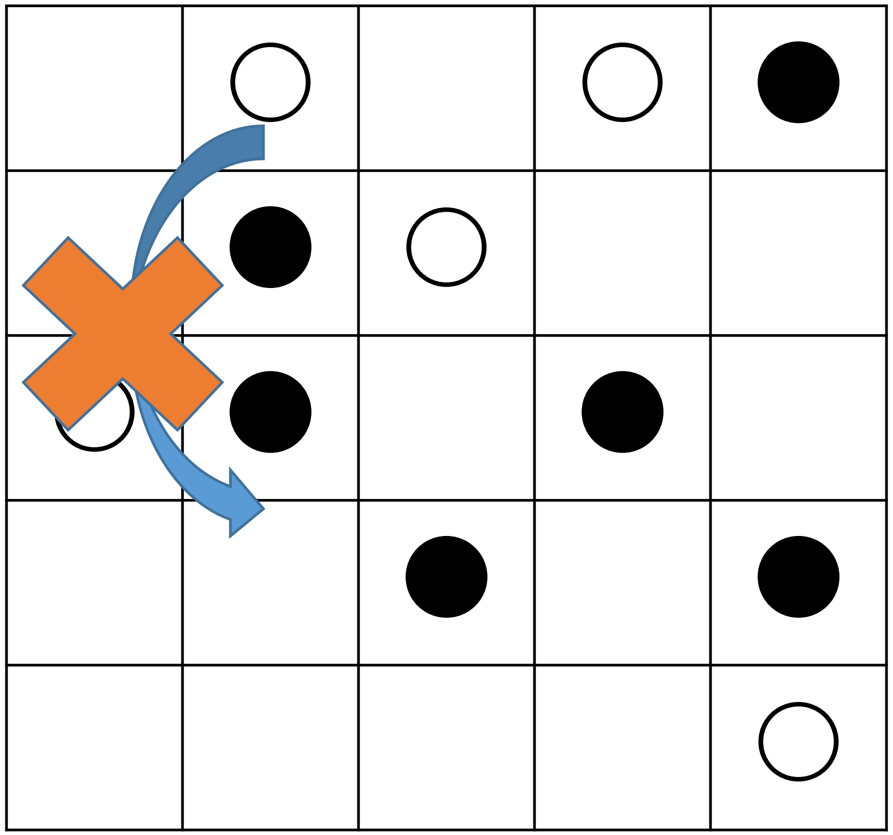
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



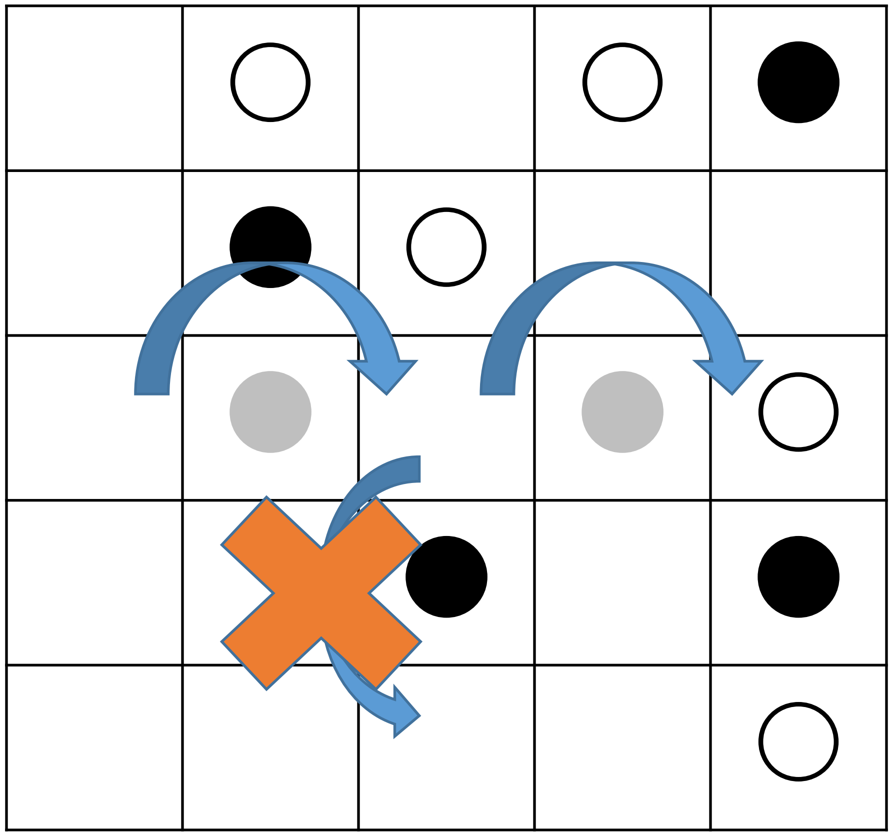
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



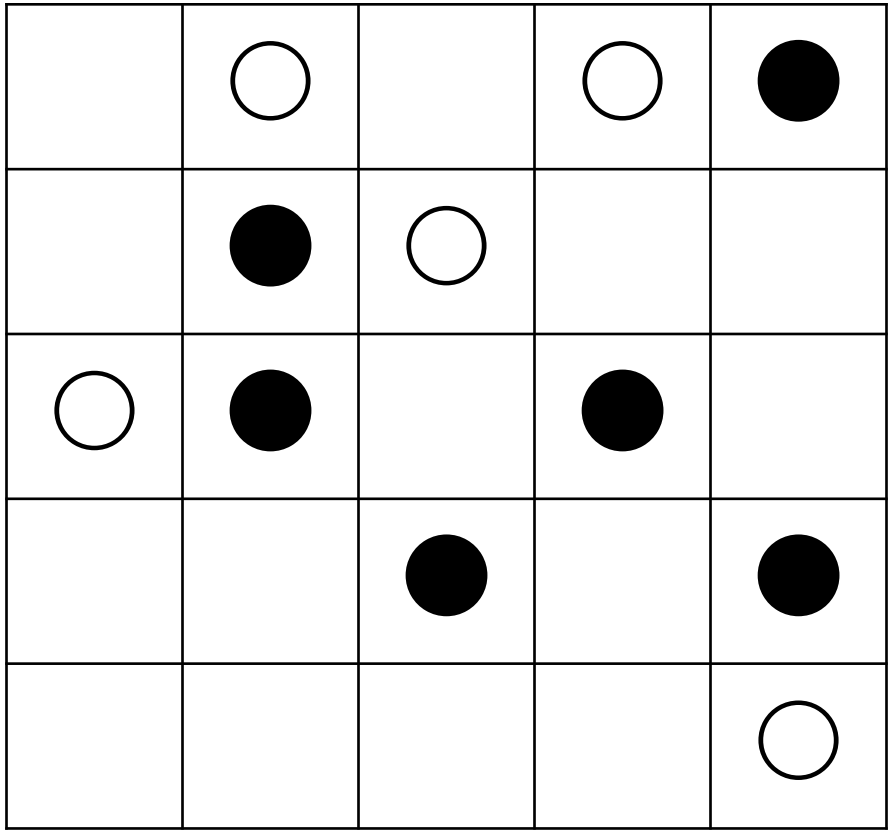
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



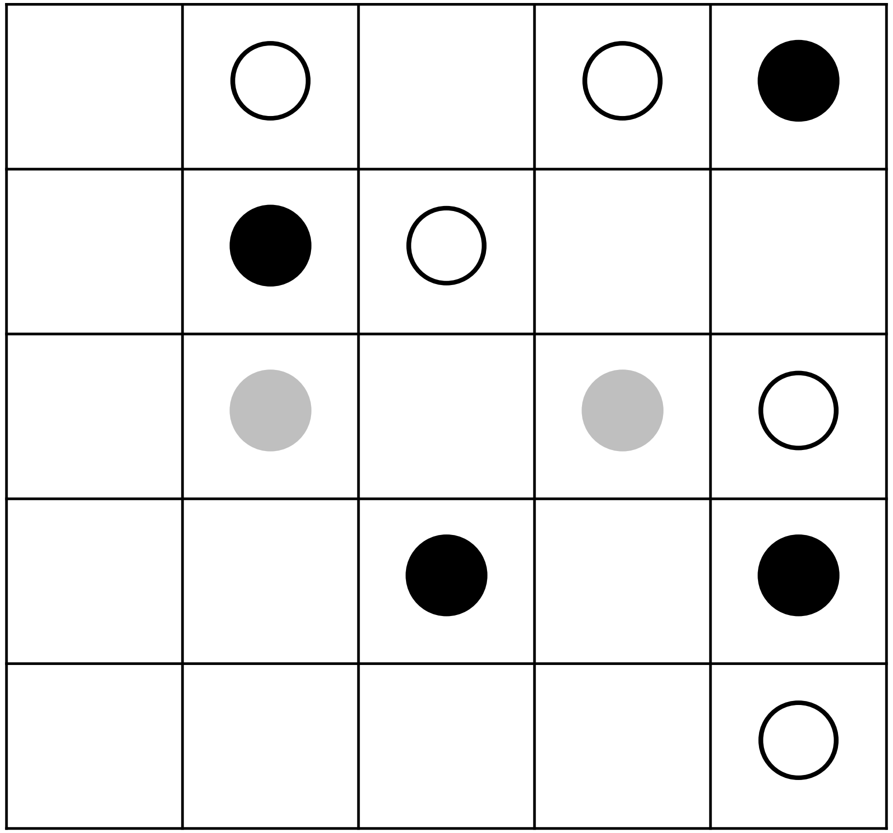
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



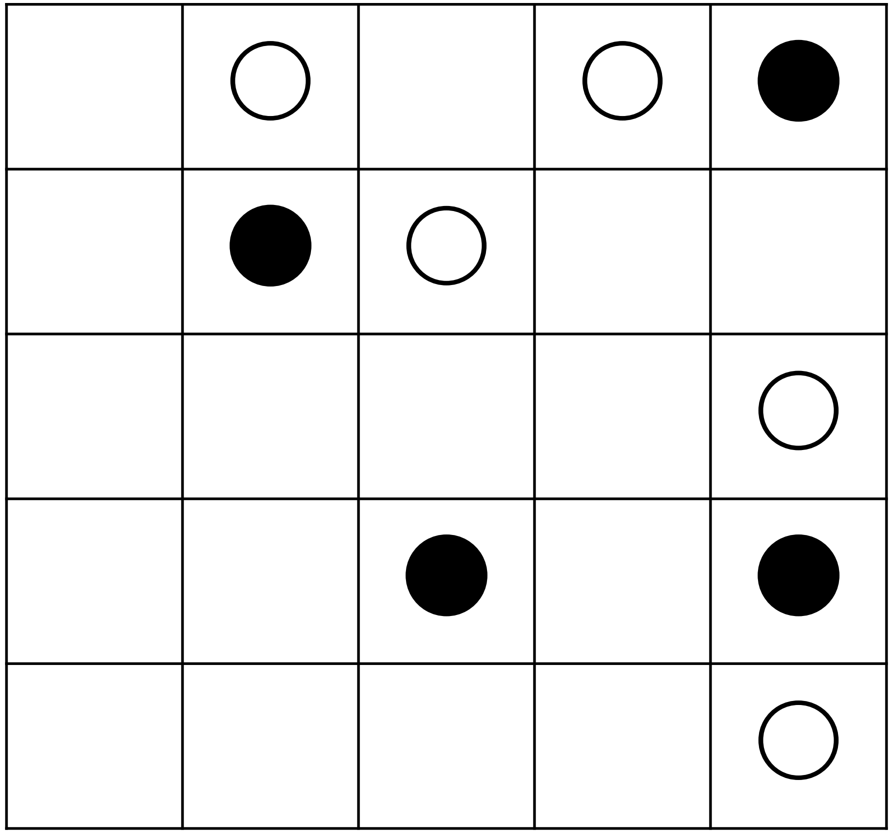
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



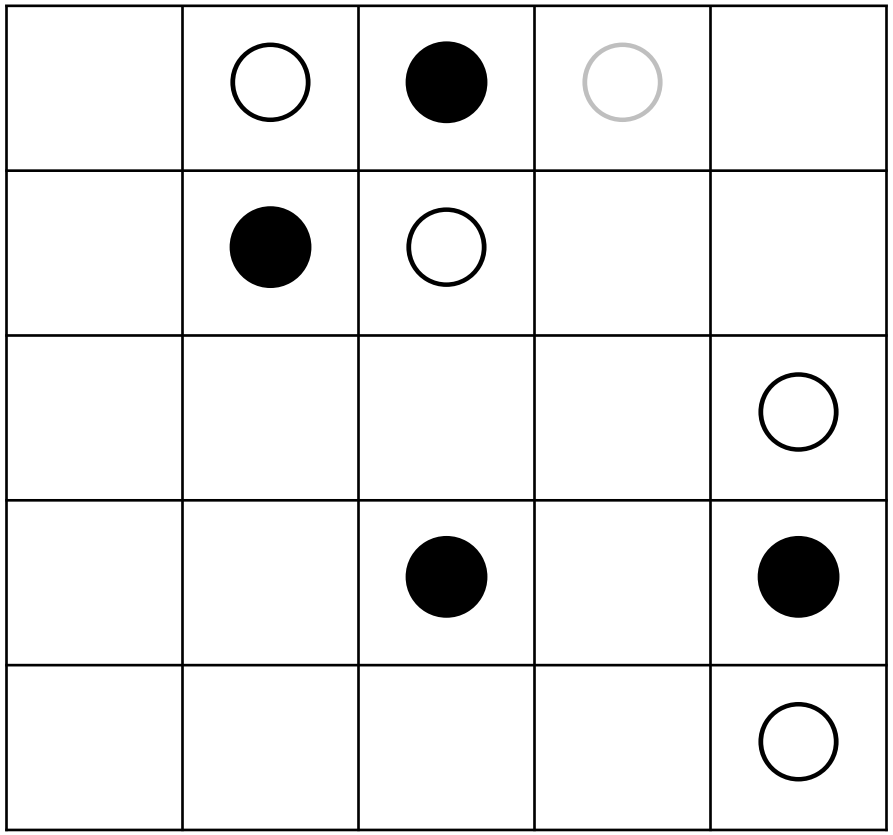
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



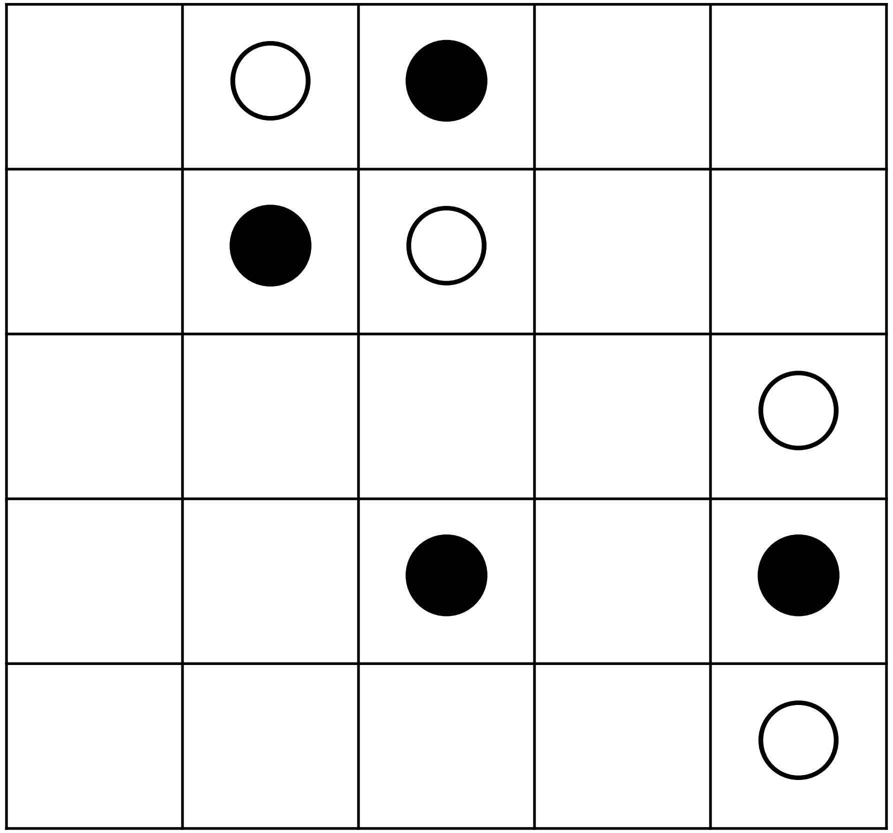
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



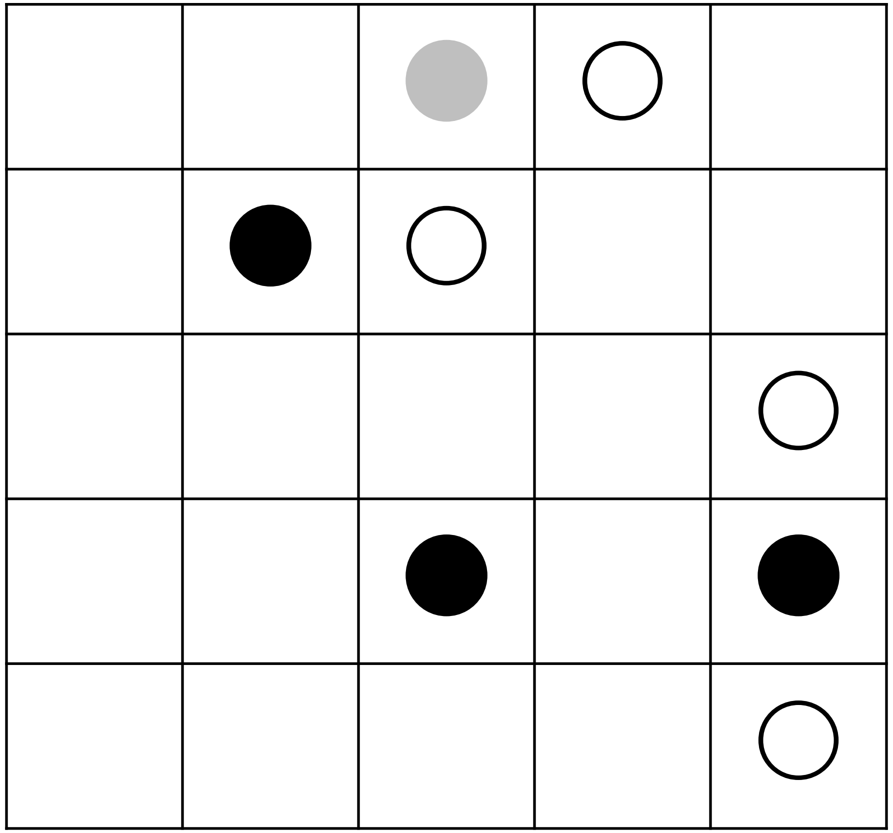
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



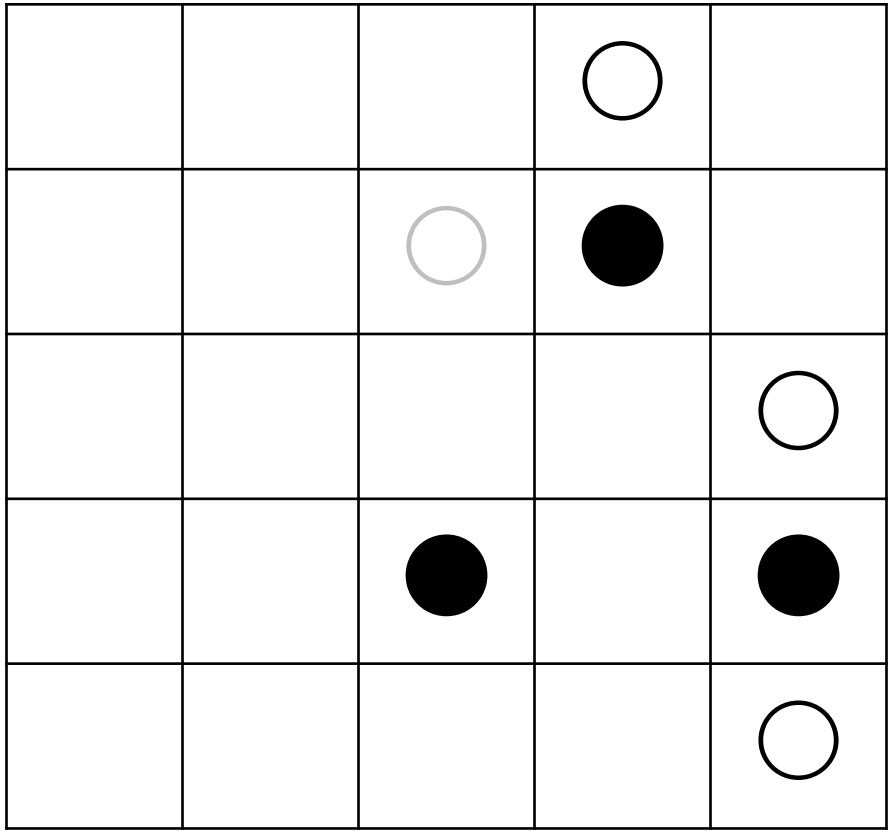
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け

			○	
	●	○		
				○
		●		●
				○

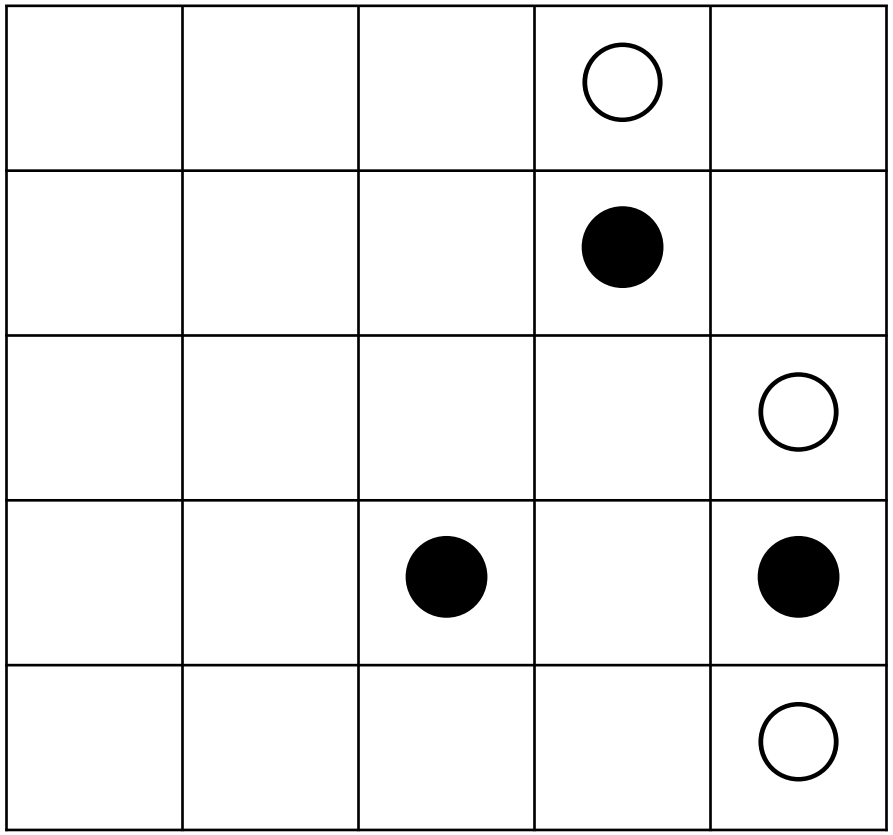
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



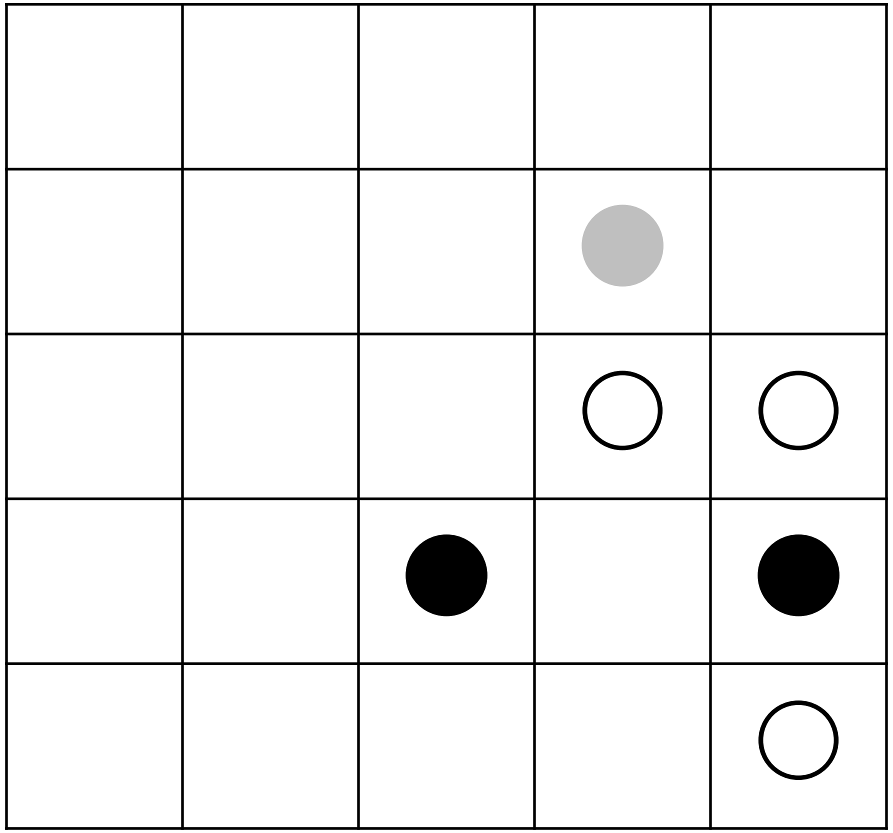
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



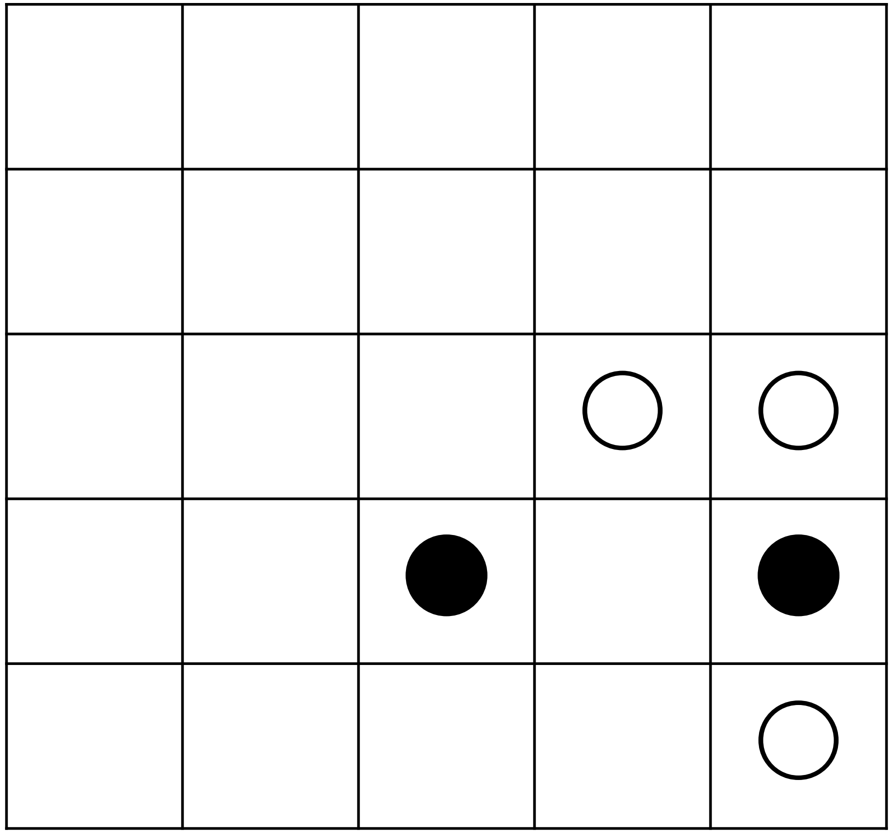
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



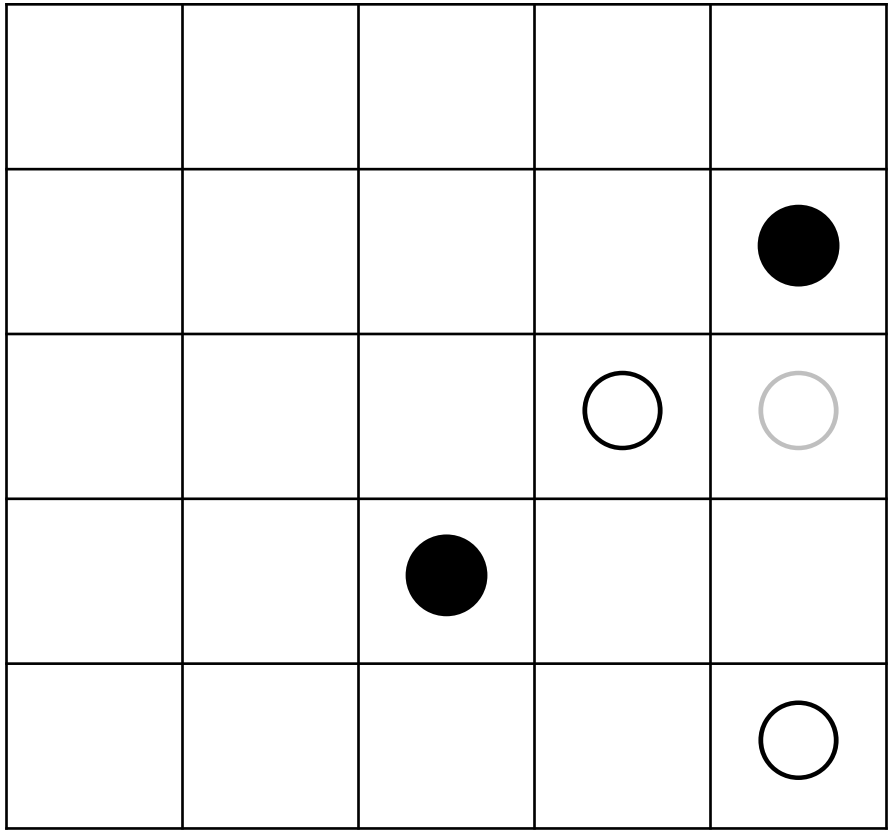
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



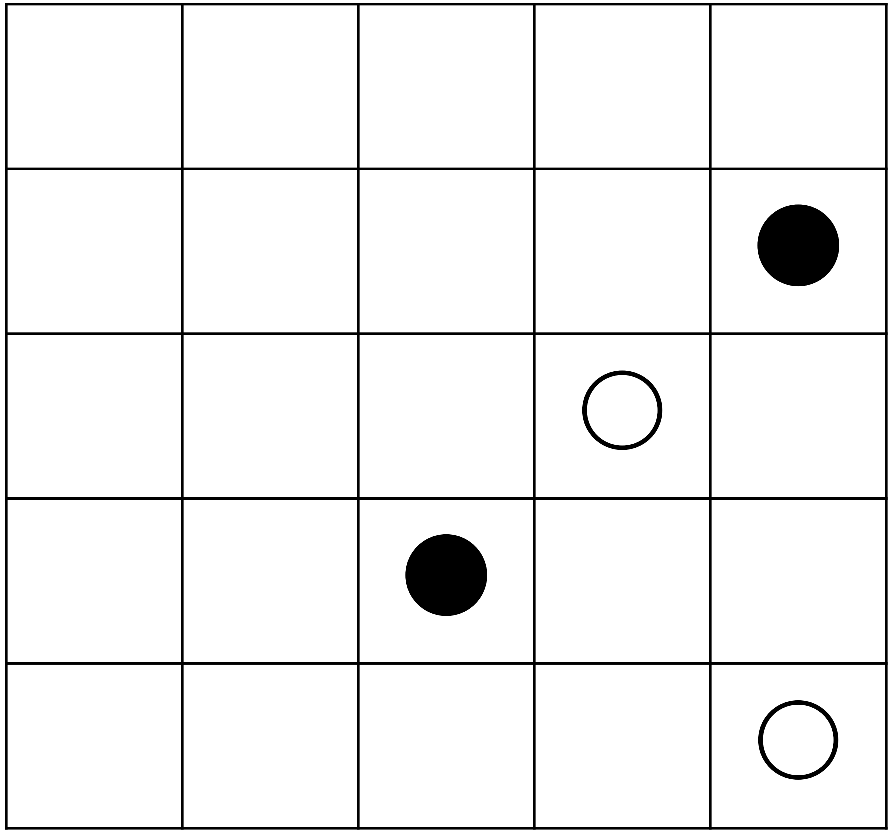
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



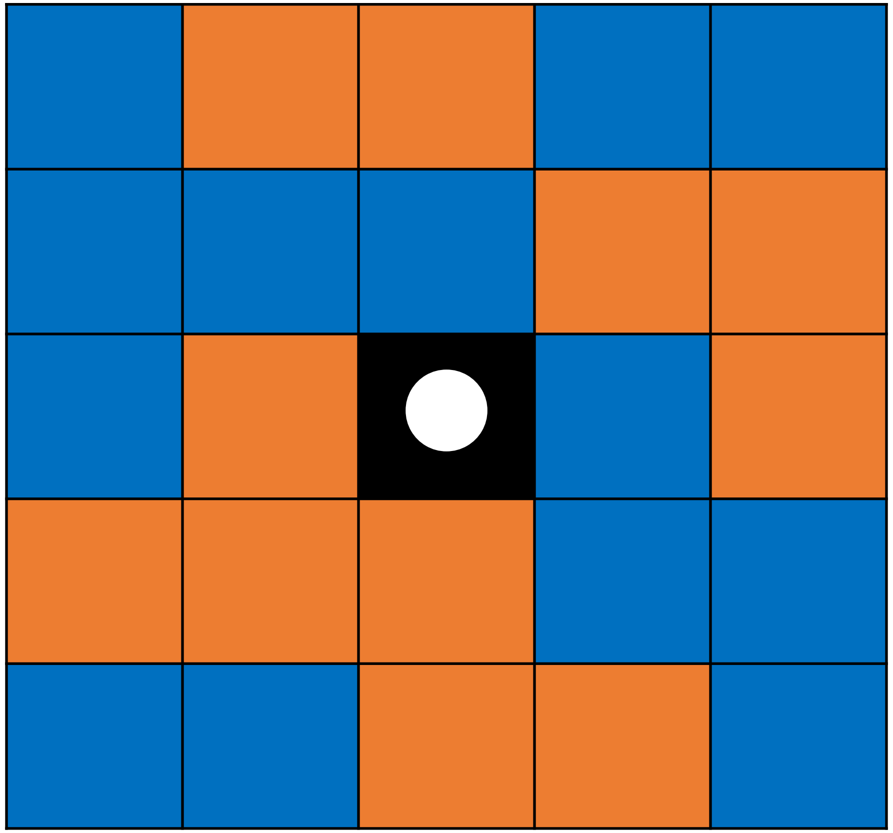
(一般化)コナネのルール

- 黒と白の駒が盤上に置かれている。黒を動かすプレイヤ（左）と白を動かすプレイヤ（右）がいる。
- プレイヤは自分の駒を一つ選び、縦横に隣接する相手の駒を一つ飛び越える。相手の駒は盤上から消える。
- 二つ以上同時に飛び越えることはできないが、一つ飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



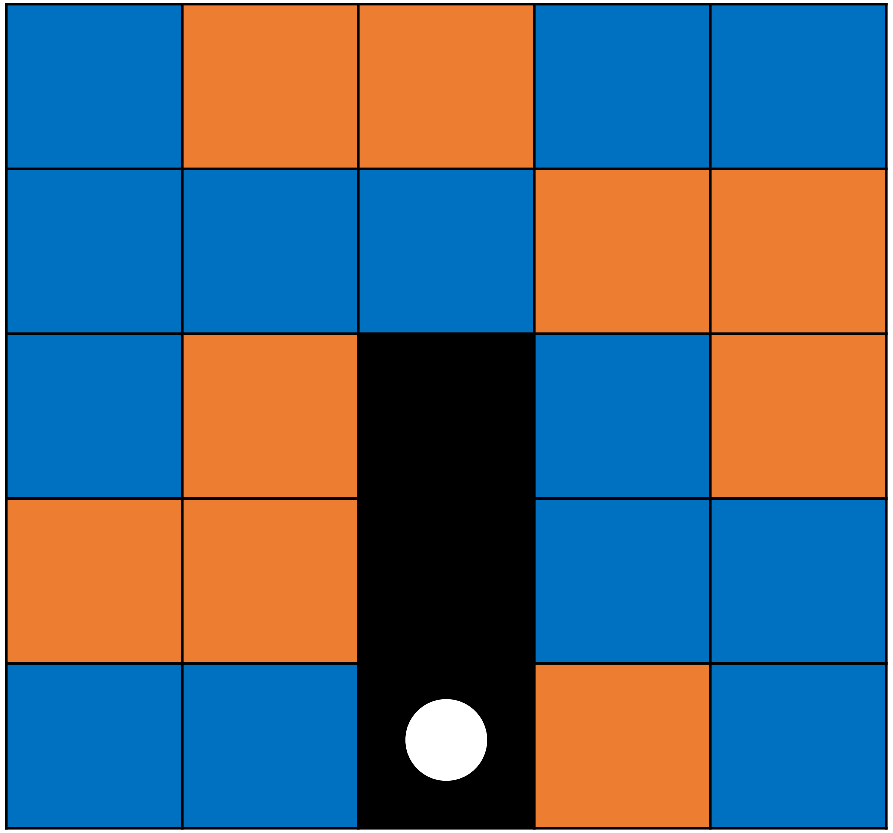
タイル返しのルール

- 青と赤のタイルがある。それらの裏は黒である。これらが敷き詰められており、駒が一つ存在する（二つ以上駒があるバージョンも考えられるが、理論的には一つで十分）。
- プレイヤはそれぞれ青（左）と赤（右）を自分の色として持つ。自分の手番で、駒を前後左右好きなだけ直進させる。ただし自分の色のタイルの上でないといけない。駒が通過したタイルは裏返る。
- 動かせなくなった方が負け。



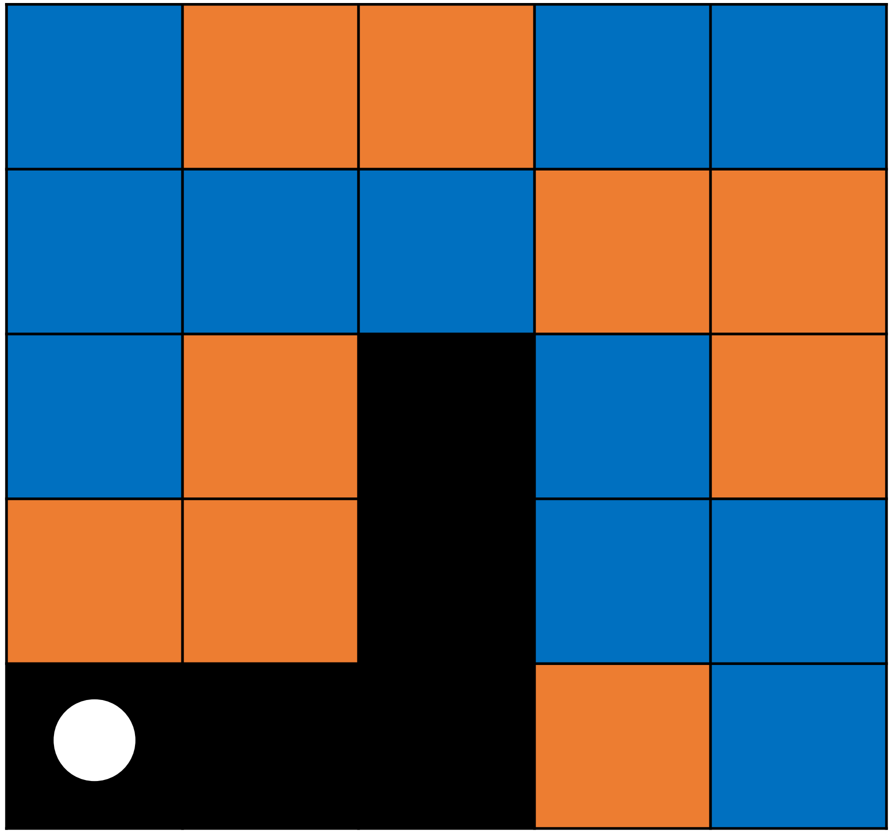
タイル返しのルール

- 青と赤のタイルがある。それらの裏は黒である。これらが敷き詰められており、駒が一つ存在する（二つ以上駒があるバージョンも考えられるが、理論的には一つで十分）。
- プレイヤはそれぞれ青（左）と赤（右）を自分の色として持つ。自分の手番で、駒を前後左右好きなだけ直進させる。ただし自分の色のタイルの上でないといけない。駒が通過したタイルは裏返る。
- 動かせなくなった方が負け。



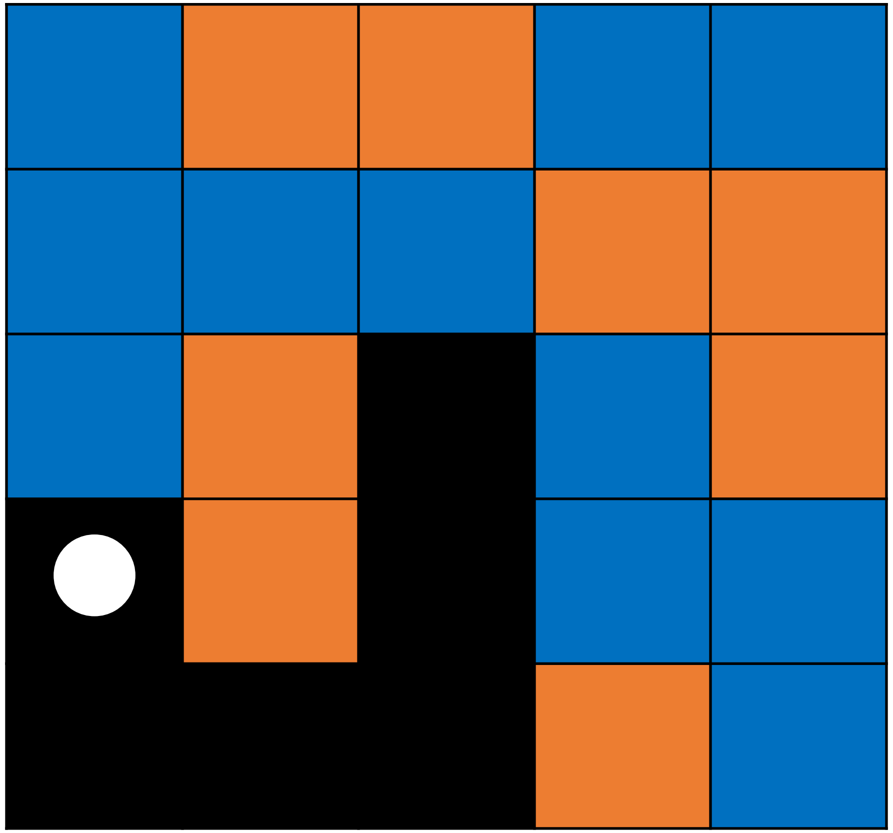
タイル返しのルール

- 青と赤のタイルがある。それらの裏は黒である。これらが敷き詰められており、駒が一つ存在する（二つ以上駒があるバージョンも考えられるが、理論的には一つで十分）。
- プレイヤはそれぞれ青（左）と赤（右）を自分の色として持つ。自分の手番で、駒を前後左右好きなだけ直進させる。ただし自分の色のタイルの上でないといけない。駒が通過したタイルは裏返る。
- 動かせなくなった方が負け。



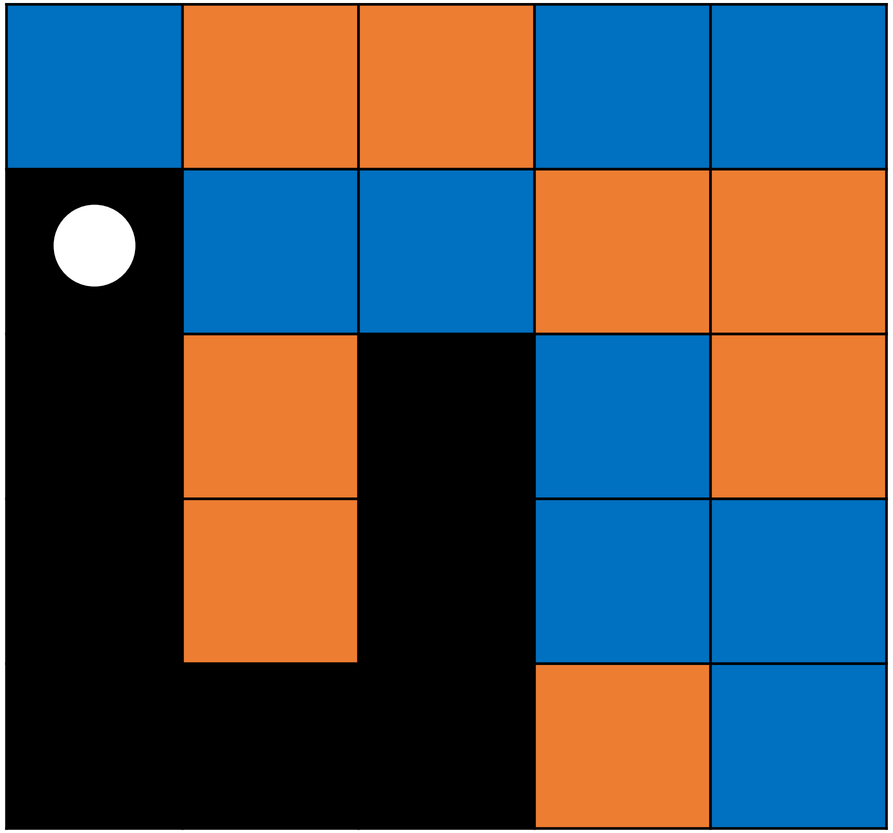
タイル返しのルール

- 青と赤のタイルがある。それらの裏は黒である。これらが敷き詰められており、駒が一つ存在する（二つ以上駒があるバージョンも考えられるが、理論的には一つで十分）。
- プレイヤはそれぞれ青（左）と赤（右）を自分の色として持つ。自分の手番で、駒を前後左右好きなだけ直進させる。ただし自分の色のタイルの上でないといけない。駒が通過したタイルは裏返る。
- 動かせなくなった方が負け。



タイル返しのルール

- 青と赤のタイルがある。それらの裏は黒である。これらが敷き詰められており、駒が一つ存在する（二つ以上駒があるバージョンも考えられるが、理論的には一つで十分）。
- プレイヤはそれぞれ青（左）と赤（右）を自分の色として持つ。自分の手番で、駒を前後左右好きなだけ直進させる。ただし自分の色のタイルの上でないといけない。駒が通過したタイルは裏返る。
- 動かせなくなった方が負け。



- 定義：ルールが**全象(universal)**であるとは，任意の値を持つ局面が，そのルールの下で現れることを言う．

定理

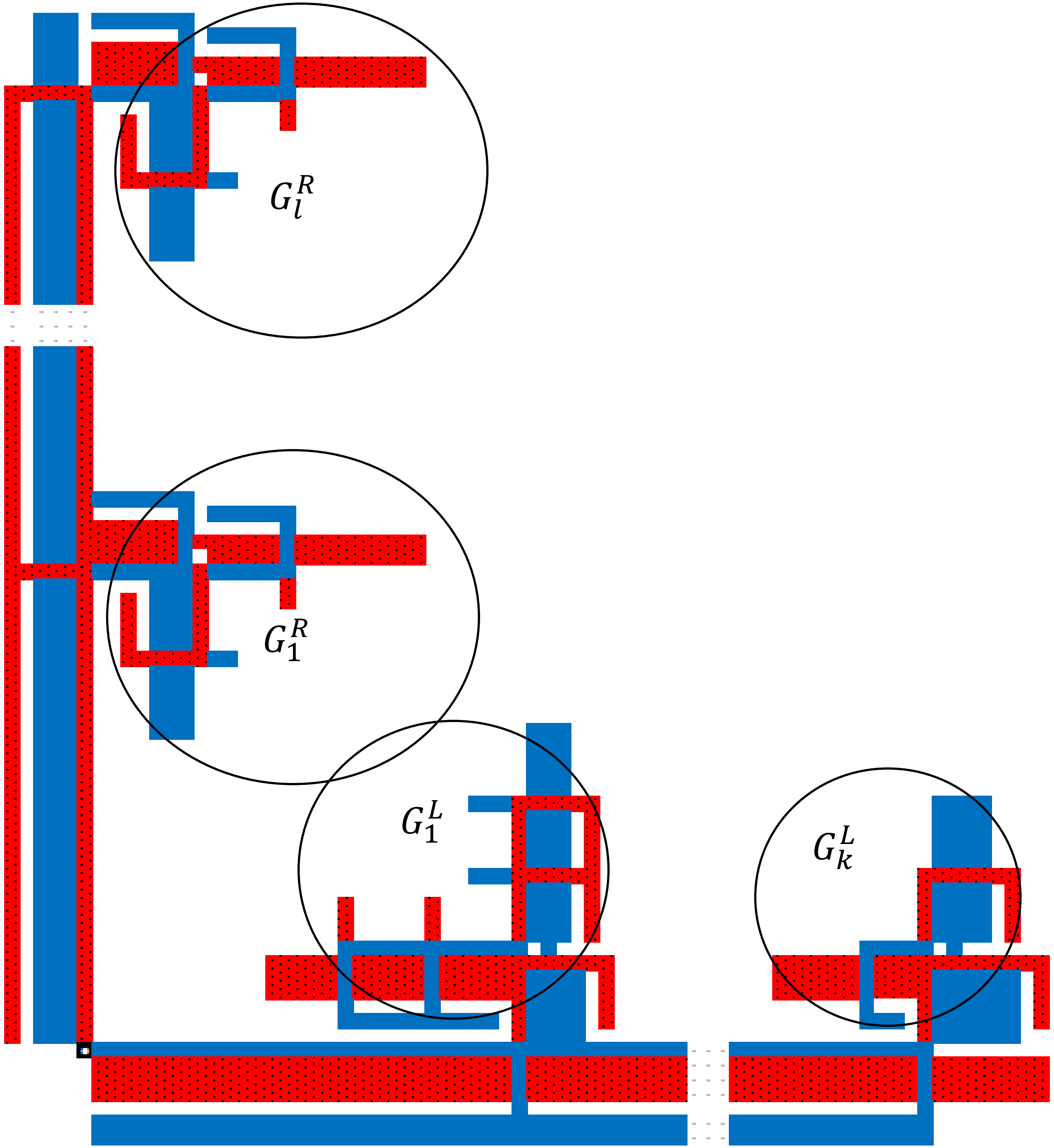
- （一般化）コナネは全象(universal)である。(Carvalho and Santos* 2019)
- **<u>タイル返しは全象である。</u>**(末續** 2020)

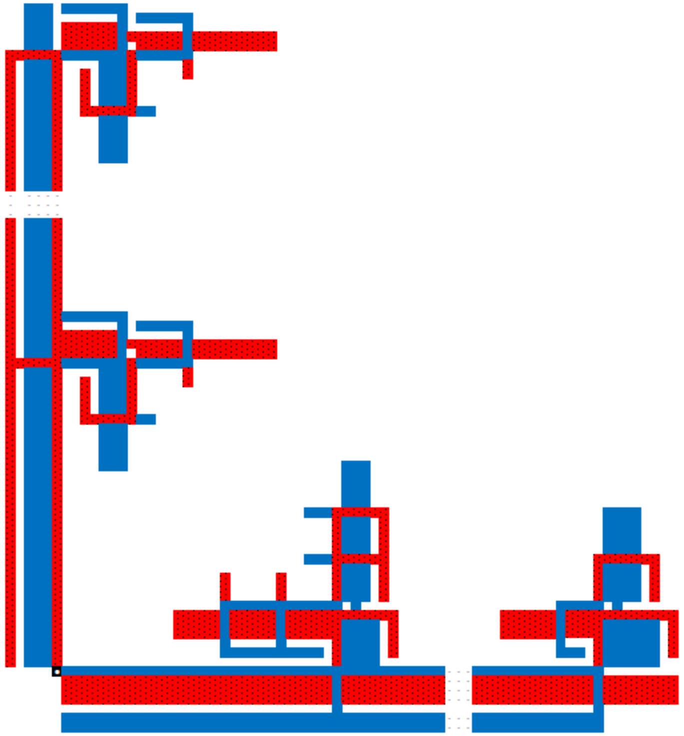
*Alda Carvalho and Carlos Pereira dos Santos, A nontrivial surjective map onto the short Conway group, in Games of no chance 5, Urban Larsson ed., 2019.

**末續鴻輝, 新たな全象(universal)ゲーム「タイル返し」のルールと全象性の証明, 情報処理学会研究報告, Vol.2020-GI-43, No.26,pp.1-6(2020)

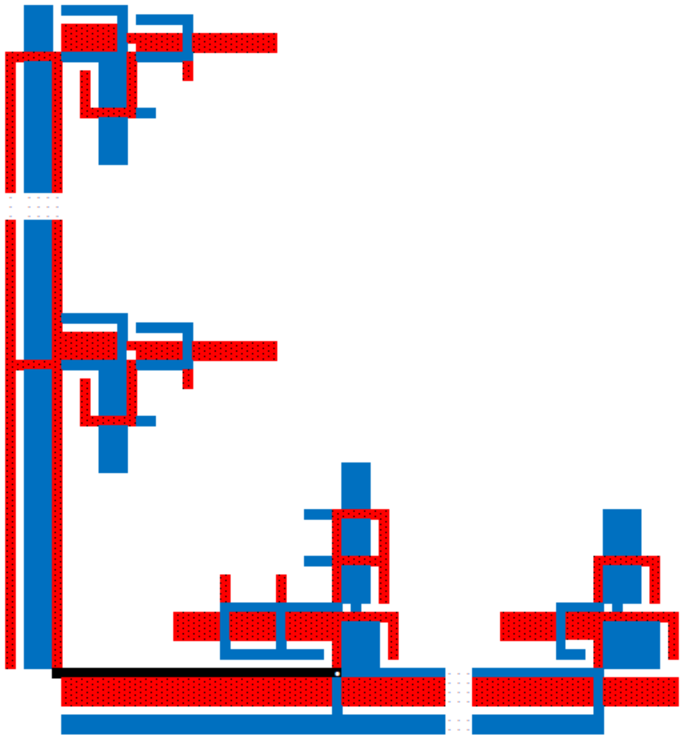
証明

- 再帰的手法を用いて証明する．
- 与えられた局面$G = \{G_1^L, G_2^L, \dots, G_k^L | G_1^R, G_2^R, \dots, G_l^R\}$に対し，値$G$を持つタイル返しの局面を以下に示す．この局面を仮に X と置き，そのうえで，$X - G$が後手必勝であることを実際にプレイして示す．

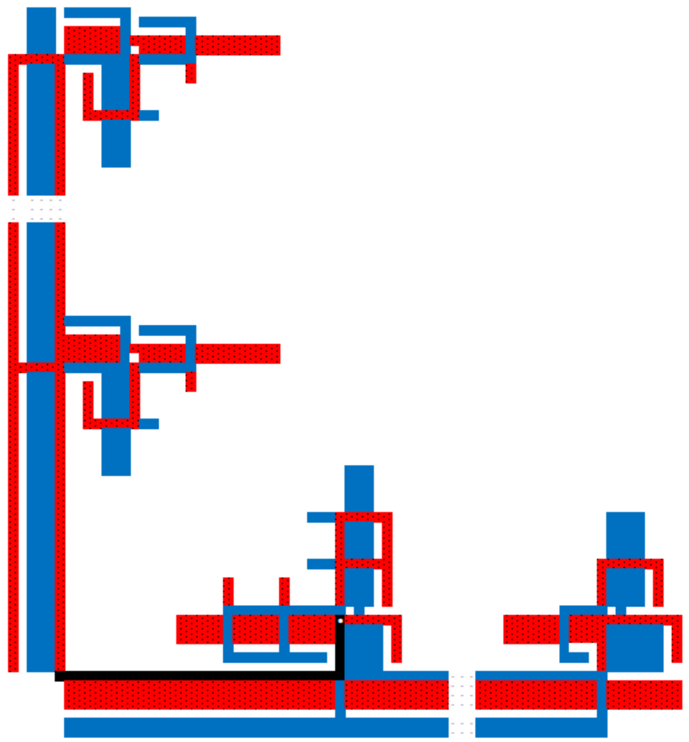

G_l^R
G_1^R
G_1^L
G_k^L



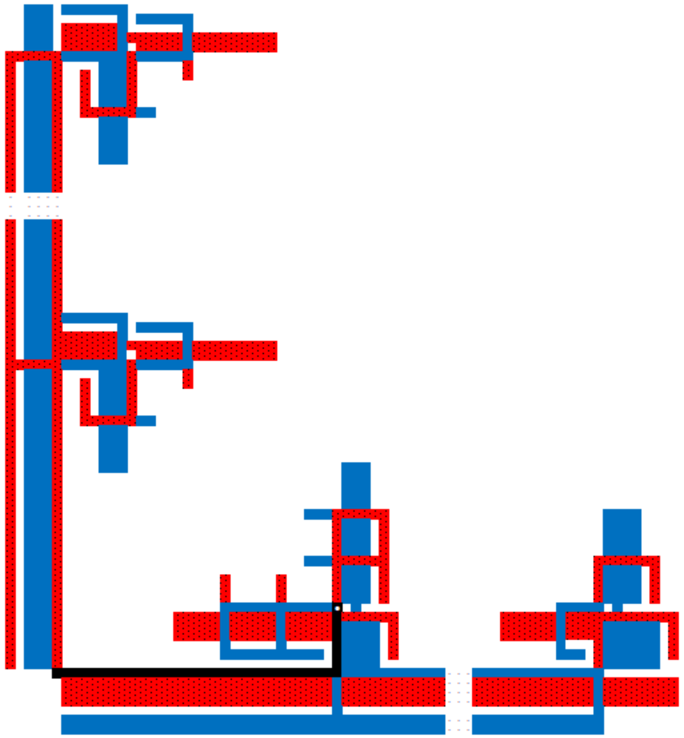
$$+\{-G_1^R, -G_2^R, \dots, -G_l^R \mid -G_1^L, -G_2^L, \dots, -G_k^L\}$$



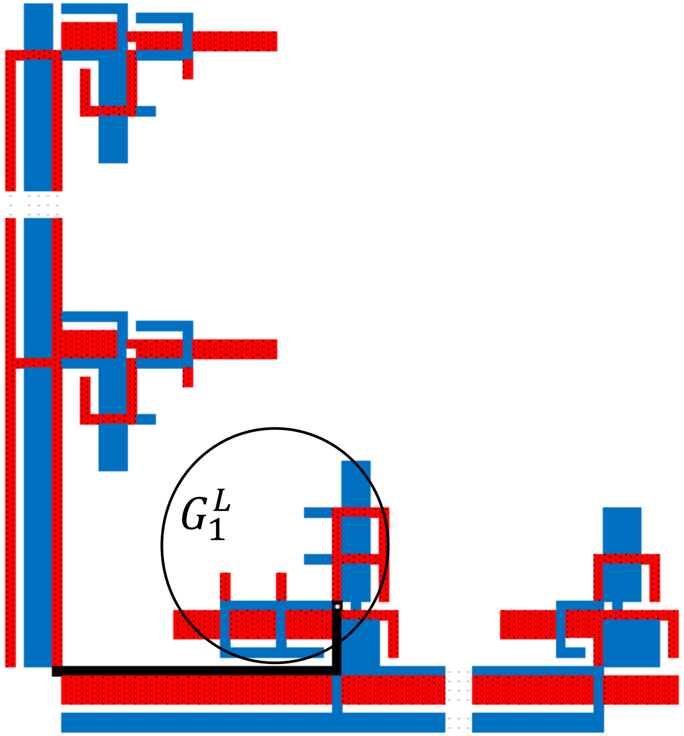
$$+\{-G_1^R, -G_2^R, \ldots, -G_l^R \mid -G_1^L, -G_2^L, \ldots, -G_k^L\}$$



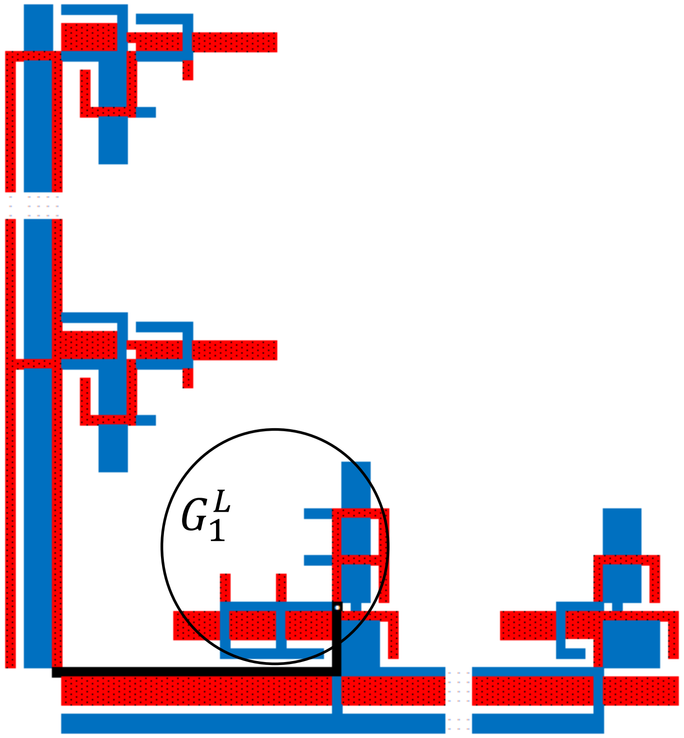
$$+\{-G_1^R, -G_2^R, \ldots, -G_l^R \mid -G_1^L, -G_2^L, \ldots, -G_k^L\}$$



$$+\{-G_1^R, -G_2^R, \dots, -G_l^R \mid -G_1^L, -G_2^L, \dots, -G_k^L\}$$



$$+\{-G_1^R, -G_2^R, \ldots, -G_l^R \mid -G_1^L, -G_2^L, \ldots, -G_k^L\}$$

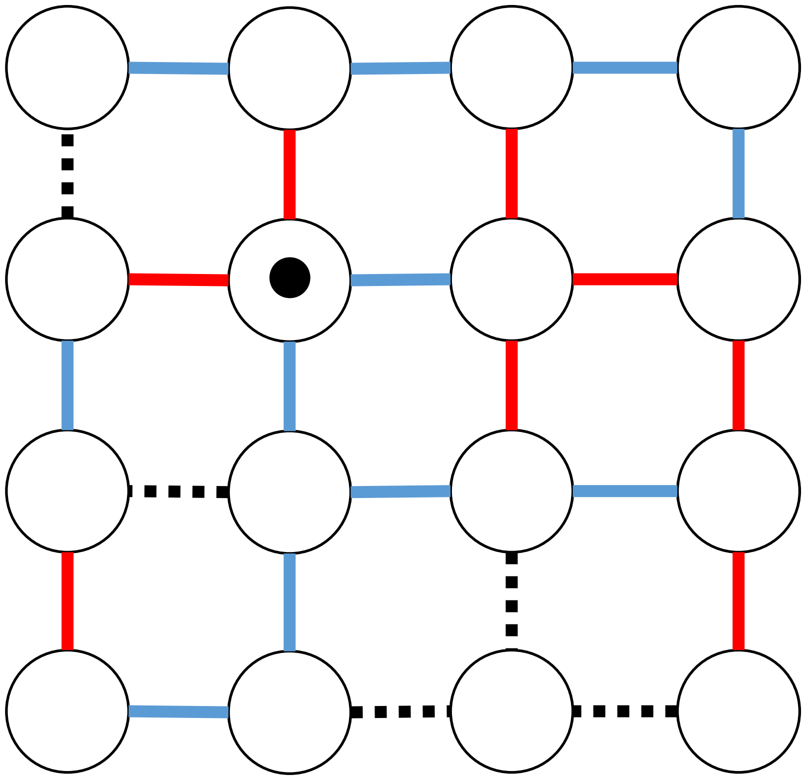


$-G_1^L$

帰着手法を用いた証明の例

- Go on lattice
- 格子盤面。頂点に駒がある。
- 青辺、赤辺、点線辺
- プレイヤは駒を一方向に好きなだけ進められる。ただし自分の色の辺。点線辺は最初の動きでのみ通過できる。
- 一度駒が通過した頂点は二度と駒が通過できない。
- 動かせなくなったら負け。

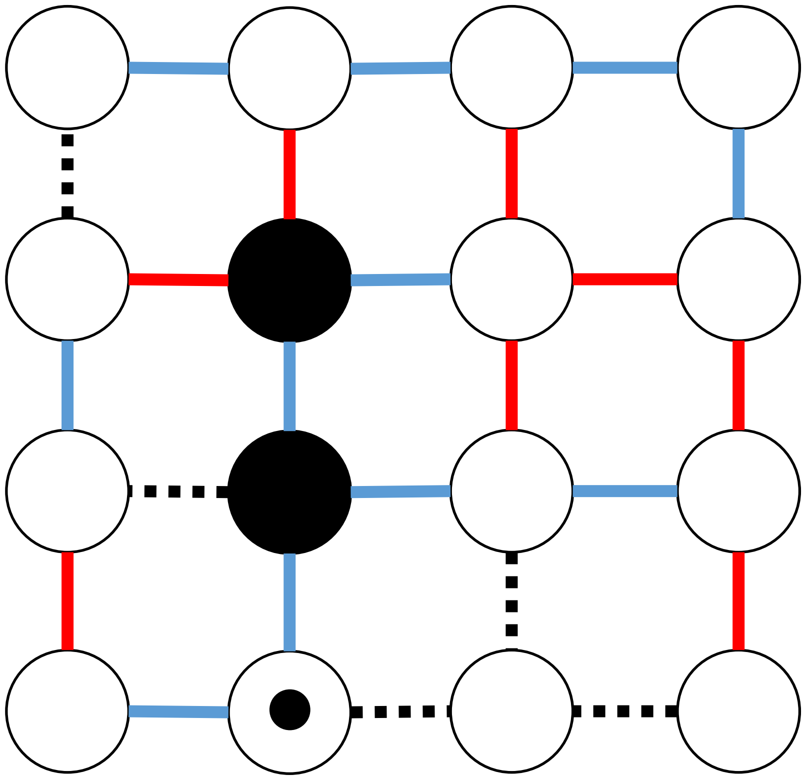
- 手番：青



帰着手法を用いた証明の例

- Go on lattice
- 格子盤面。頂点に駒がある。
- 青辺、赤辺、点線辺
- プレイヤは駒を一方向に好きなだけ進められる。ただし自分の色の辺。点線辺は最初の動きでのみ通過できる。
- 一度駒が通過した頂点は二度と駒が通過できない。
- 動かせなくなったら負け。

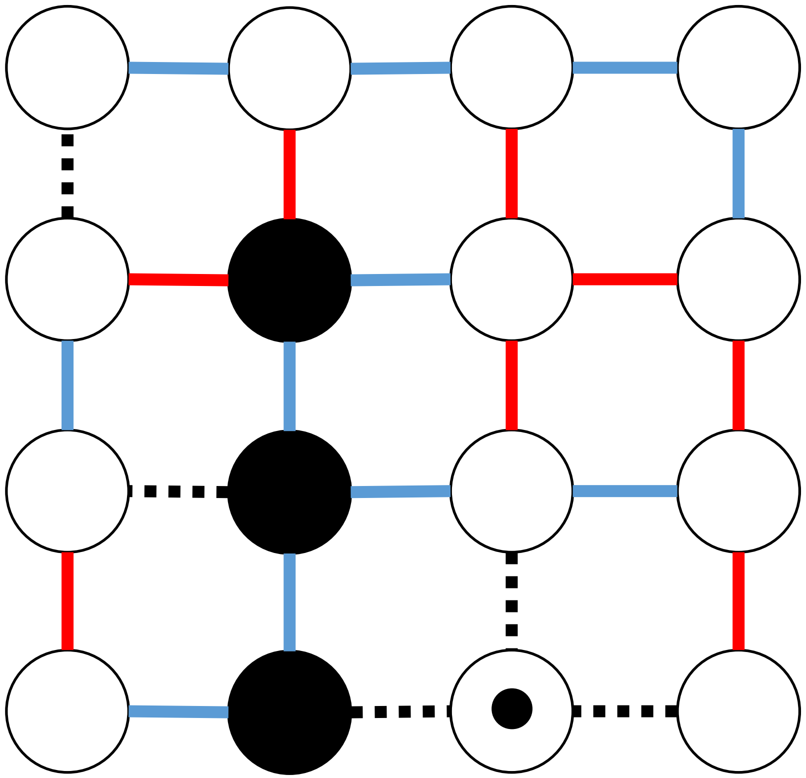
- 手番：赤



帰着手法を用いた証明の例

- Go on lattice
- 格子盤面。頂点に駒がある。
- 青辺、赤辺、点線辺
- プレイヤは駒を一方向に好きなだけ進められる。ただし自分の色の辺。点線辺は最初の動きでのみ通過できる。
- 一度駒が通過した頂点は二度と駒が通過できない。
- 動かせなくなったら負け。

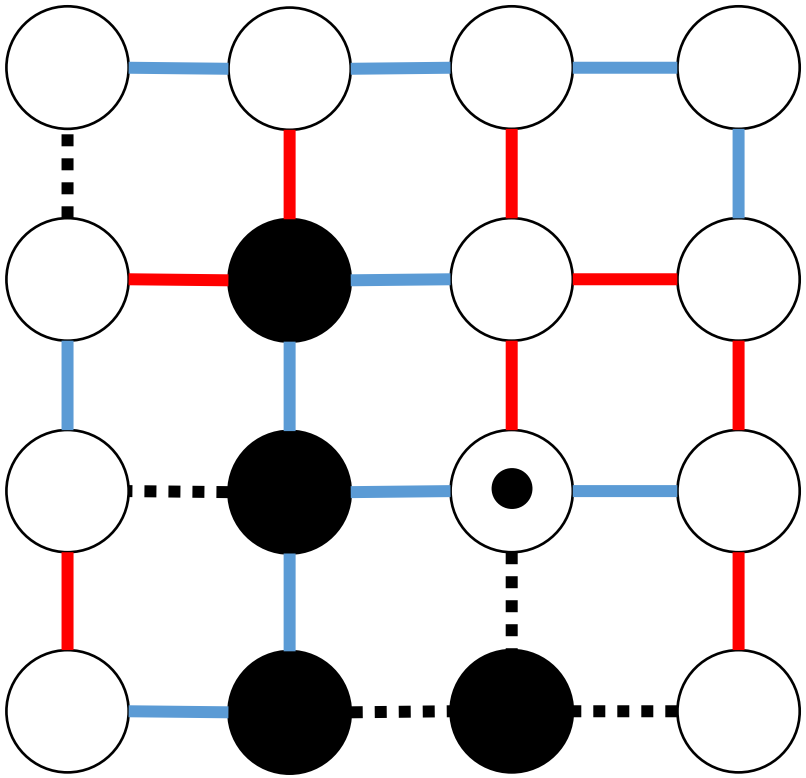
- 手番：青



帰着手法を用いた証明の例

- Go on lattice
- 格子盤面。頂点に駒がある。
- 青辺、赤辺、点線辺
- プレイヤは駒を一方向に好きなだけ進められる。ただし自分の色の辺。点線辺は最初の動きでのみ通過できる。
- 一度駒が通過した頂点は二度と駒が通過できない。
- 動かせなくなったら負け。

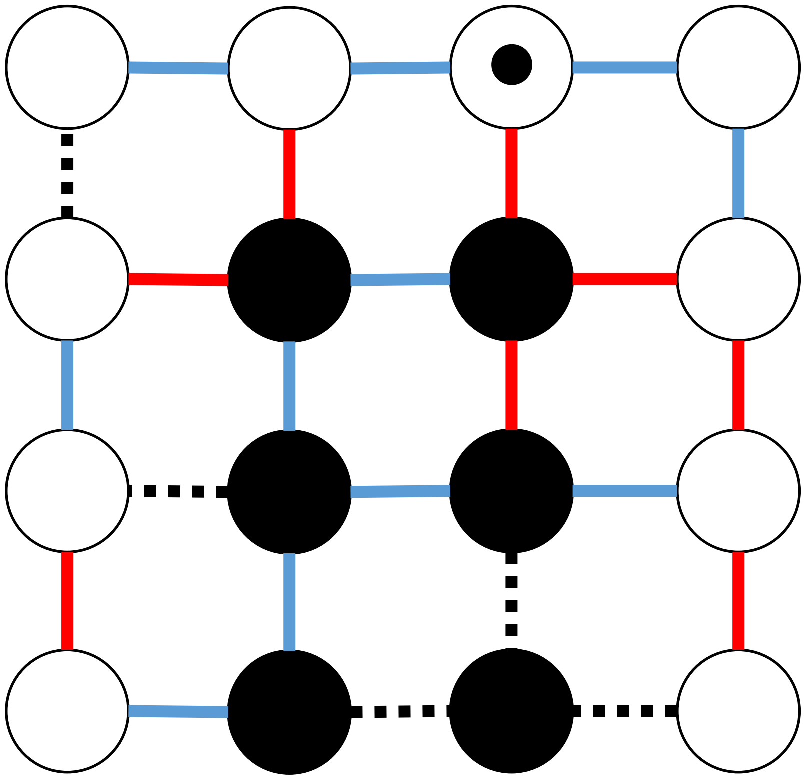
- 手番：赤



帰着手法を用いた証明の例

- Go on lattice
- 格子盤面。頂点に駒がある。
- 青辺、赤辺、点線辺
- プレイヤは駒を一方向に好きなだけ進められる。ただし自分の色の辺。点線辺は最初の動きでのみ通過できる。
- 一度駒が通過した頂点は二度と駒が通過できない。
- 動かせなくなったら負け。

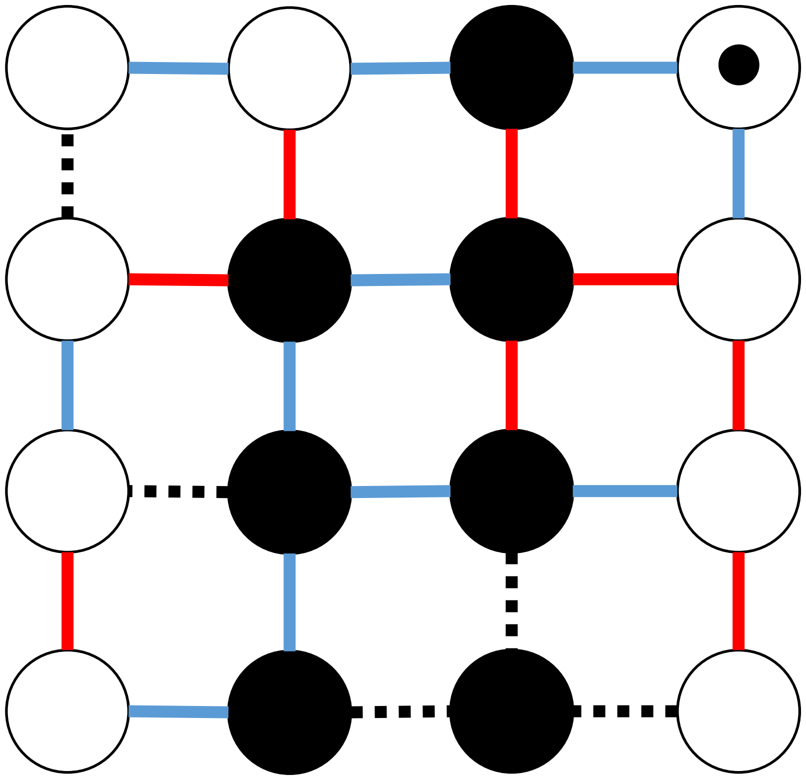
- 手番：青



帰着手法を用いた証明の例

- Go on lattice
- 格子盤面。頂点に駒がある。
- 青辺、赤辺、点線辺
- プレイヤは駒を一方向に好きなだけ進められる。ただし自分の色の辺。点線辺は最初の動きでのみ通過できる。
- 一度駒が通過した頂点は二度と駒が通過できない。
- 動かせなくなったら負け。

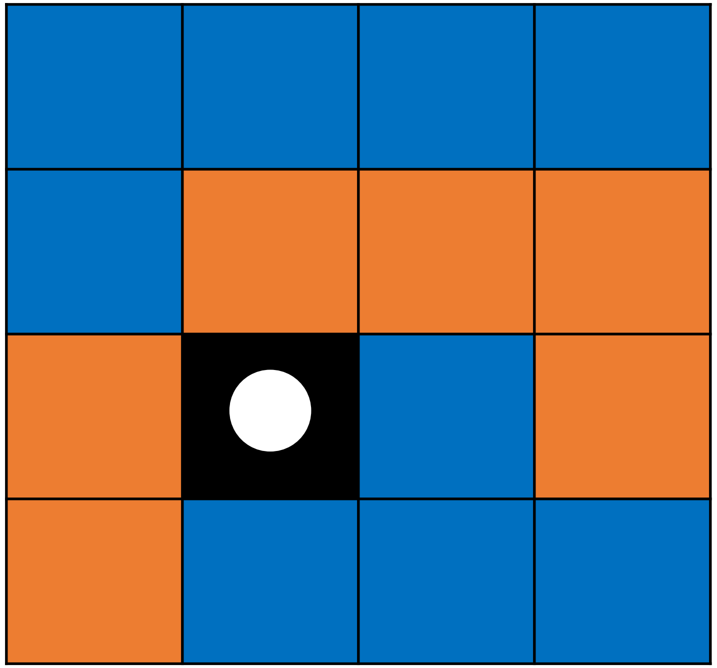
- 赤が動かせないので青の勝利



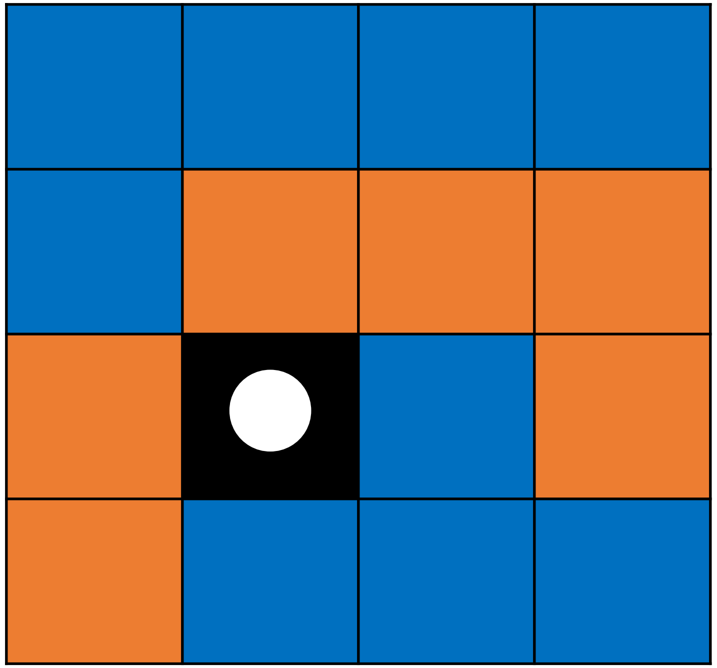
帰着手法を用いた証明

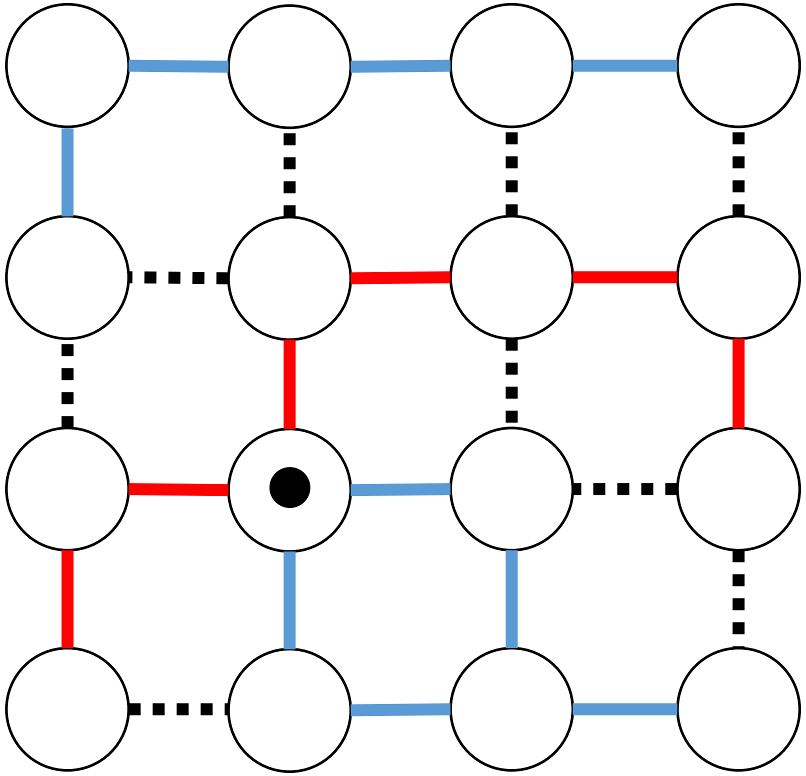
- Go on latticeは全象である。
- 証明：タイル返しの任意の局面は赤辺、青辺、点線辺を用いてGo on latticeの局面として表現することができる。
- 同じ色の接続をその色の辺、違う色の接続を点線辺で表現する。

帰着手法を用いた証明

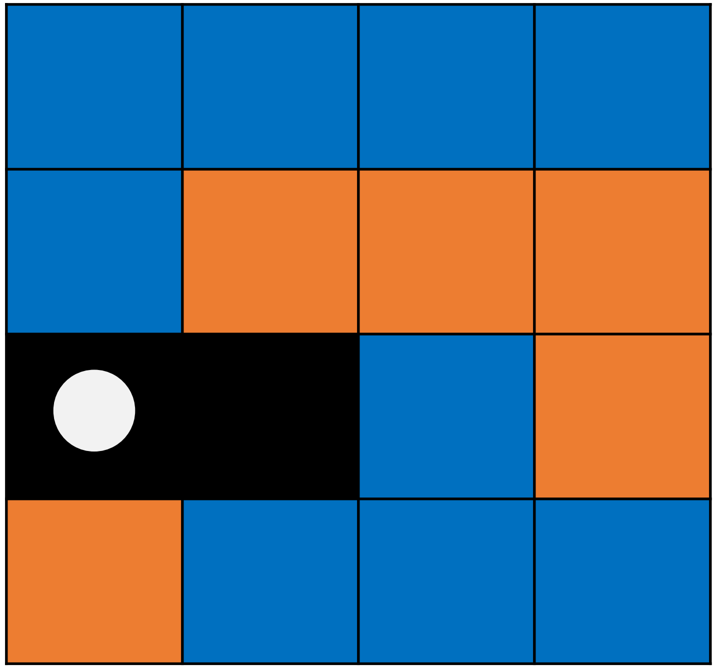


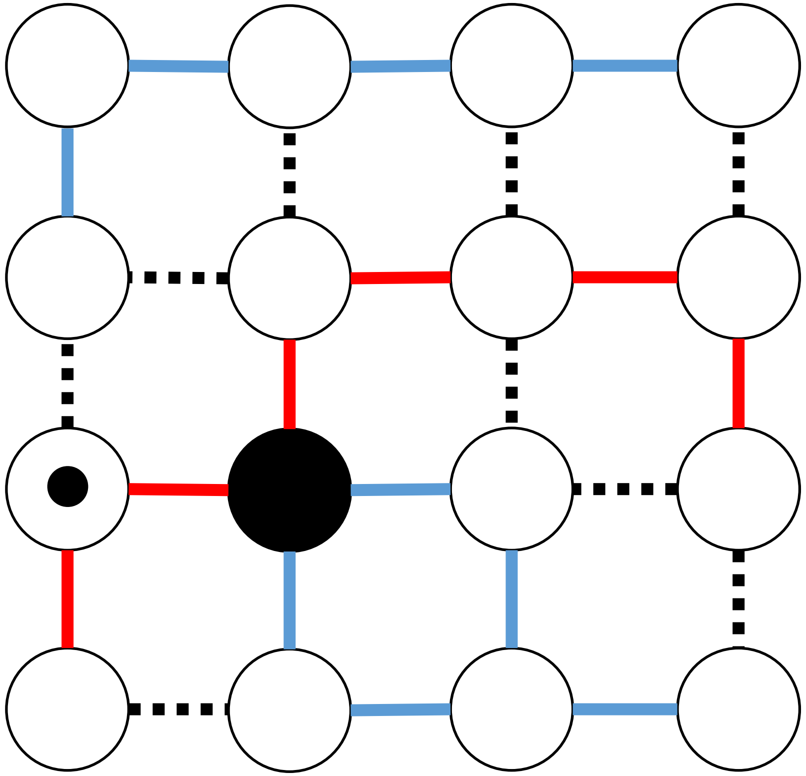
帰着手法を用いた証明



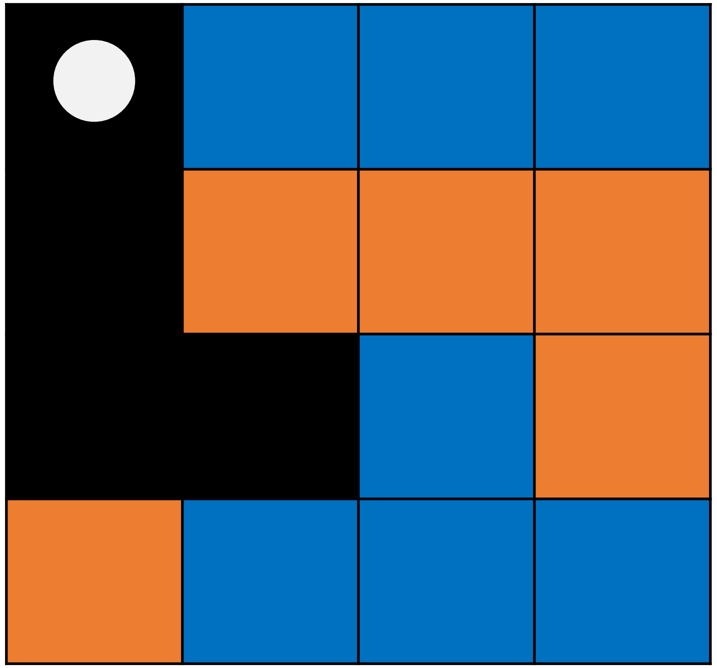


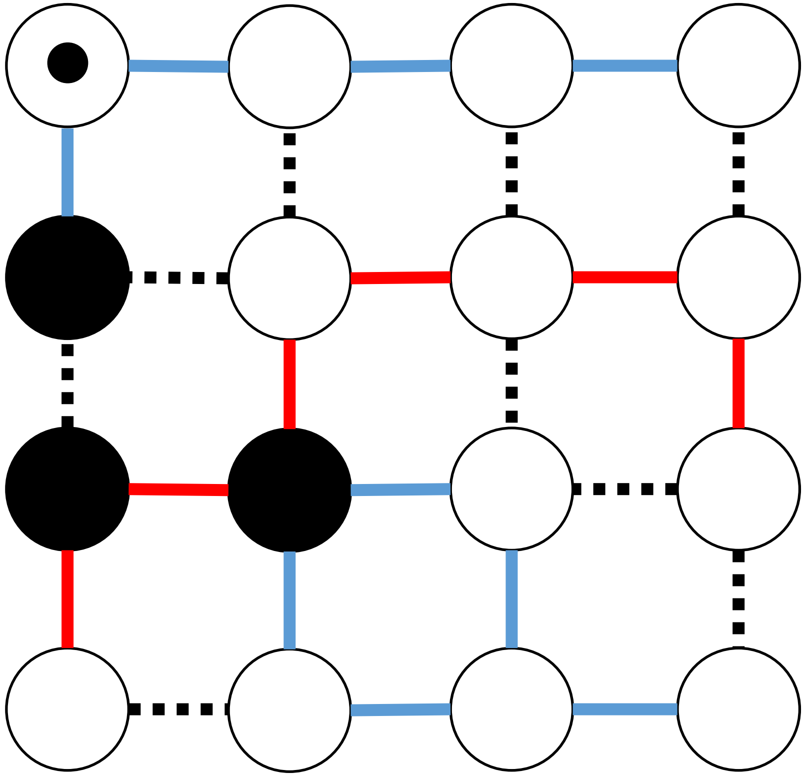
帰着手法を用いた証明



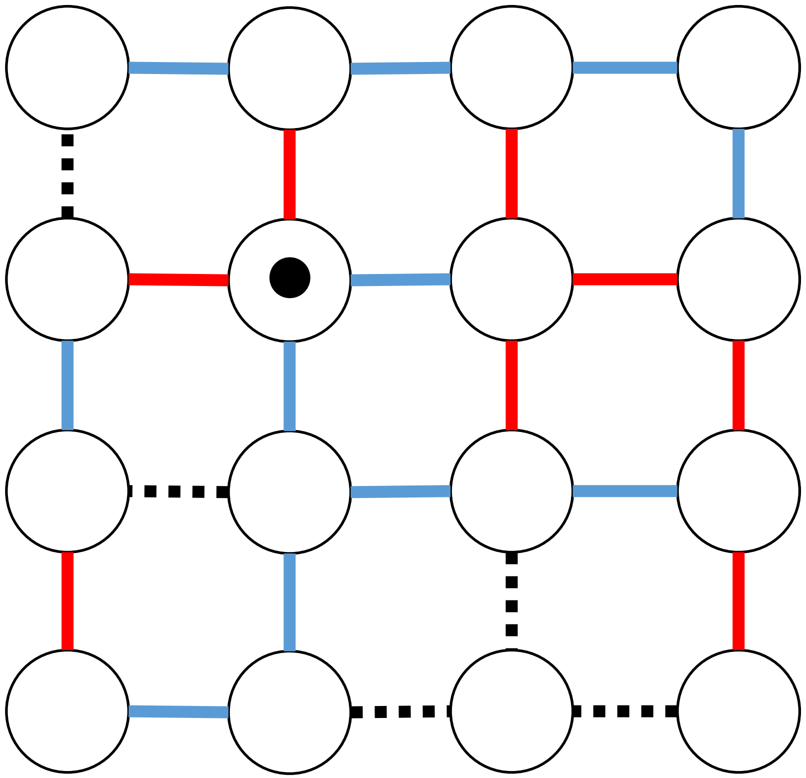


帰着手法を用いた証明





- 右のような局面はタイル返しでは（先の対応では）表現できないので完全に同値なルールというわけではない。



ぜひみなさんも全象ルールを
探してみてください！